TEORIJA SKUPOVA
(Vježbe 2013/14)

Renata Turkeš

27. travnja 2014.

Sadržaj

1 Od paradoksa do aksiomatske teorije **2**

2 Aksiomatika i operacije **5**
2.1 Zermelo-Fraenkelov sistem aksioma teorije skupova 5
Zadaci za samostalan rad 13
2.2 Operacije sa skupovima 13
Zadaci za samostalan rad 28
2.3 Relacije i funkcije 29
2.3.1 Relacije 29
Zadaci za samostalan rad 53
2.3.2 Funkcije 58
Zadaci za samostalan rad 80
2.4 Aksiom izbora 81
Zadaci za samostalan rad 86

3 Kardinalni brojevi **87**
Zadaci za samostalan rad 106

Urađeni zadaci u sljedećem materijalu prate predavanja koja iz predmeta Teorija skupova drži dr.sci. Nermin Okičić, docent, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli, pa je stoga prvenstveno namijenjen studentima/cama koji pohađaju navedeni kurs. U njemu se nalaze zadaci rađeni na auditornim vježbama tokom školske 2012/13. i 2013/14. godine, te neki dodatni zadaci za vježbu. Skripta je dostupna svima za download na

`http://renataturkes.wix.com/renata-turkes#!set-theory/c1789`.

Definicije i osnovni rezultati su u ovom materijalu izostavljeni, jer se svi mogu naći u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/2013). Studenti/ce se stoga upućuju da se prije izrade zadataka upoznaju sa potrebnim pojmovima, njihovim karakterizacijama i dokazanim osobinama, jer će se isti ovdje koristiti kao polazno gradivo.

Literatura korištena za pripremu ovog materijala je uglavnom sljedeća:

1. N. Okičić, *Teorija skupova (Predavanja 2012/13)*
2. S. Lipschutz, *Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*
3. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vukovic/Diplomski-kolegiji/TS/TS-zbirka-2009-07.`

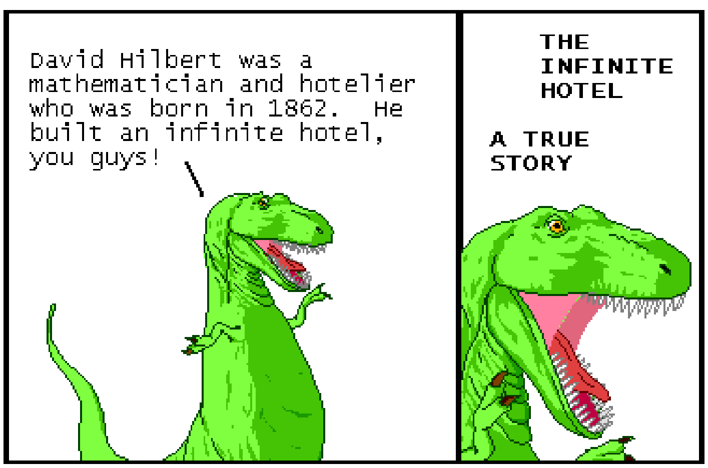
kao i vježbe na kursu Teorija skupova kod asistentice Sanite Ibrišević. Rješenja istih u najvećem broju rad su autorice ovih vježbi, kao i sve greške u materijalu. Molim sve koji/e te greške uoče da ih pošalju na renata.turkes@hotmail.com, kao i bilo koje druge primjedbe, sugestije ili pitanja. Unaprijed se zahvaljujem, i svima želim ugodan rad.

Poglavlje 1

Od paradoksa do aksiomatske teorije

Teorija skupova jedna je od fundamentalnih grana matematike, čije je moderno proučavanje započeo Georg Cantor 1870-ih godina. Cantorova teorija skupova se najčešće naziva naivnom teorijom skupova, jer je definirana neformalno, koristeći prirodni jezik.

Cantorova teorija skupova je najbolji proizvod matematičkog genija i jedan od vrhunskih postignuća čisto intelektualnog ljudskog djelovanja.
(David Hilbert)



Zaista, neupitna je činjenica da je Cantor bio jedan od najznačnijih matematičara i da je njegov doprinos teoriji skupova od neizmjerne važnosti. Prije Cantora, pojam skupa je bio veoma primitivan, zasnovan na idejama koje datiraju još od Aristotela. Postojali su samo konačni skupovi, koji su jednostavni za razumijevanje, a pojam beskonačnosti smatran je prikladnim isključivo za filozofiju, ne i matematiku. Cantor je pokazao da postoji beskonačno mnogo veličina za beskonačne skupove, ustanovivši prvi da teorija skupova nije trivijalna i da je potrebno njeno temeljito izučavanje. Međutim, nije prošlo mnogo vremena dok se nisu pojavili paradoksi koji su poljuljali Cantorovu naivnu teoriju skupova, i u konačnici doveli do potrebe za uvođenjem aksiomatske teorije skupova.

Cantor je sam 1899. godine otkrio paradoks u svojoj teoriji: Ako je X skup svih skupova, koji je kardinalni broj od X? (Pojam kardinalnog broja će biti eksplicitno definiran kasnije u ovom kursu, ali je studentima/cama neformalna definicija kardinalnog broja kao "broja elemenata" skupa vjerovatno poznata od ranije.) Očigledno, to mora biti najveći postojeći kardinal. Međutim, za svaki skup A, kardinalni broj partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ od A je strogo veći od kardinalnog broja skupa A, tj. za svaki skup A imamo $\mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) > \mathrm{card}(A)$. (Ova činjenica poznata je kao Cantorov teorem, i također će biti eksplicitno dokazana kasnije u ovom kursu). Dakle, za $A = X$, imamo

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) > \mathrm{card}(X),$$

što je kontradikcija sa činjenicom da je $\mathrm{card}(X)$ najveći kardinal.

Nekoliko godina kasnije, Bertrand Russel otkrio je sljedeći paradoks: Ako je S skup svih skupova koji ne sadrže samog sebe, tj. $S = \{x \mid x \notin x\}$, da li S sadrži samog sebe? Po definiciji skupa S, S sadrži samog sebe ako i samo ako S ne sadrži samog sebe, odnosno

$$S \in S \quad \Leftrightarrow \quad S \notin S,$$

što je kontradikcija.

Ovi su paradoksi pokazali da naivna teorija skupova dovodi do kontradikcija, a problematičnim se pokazala činjenica da je u ovoj teoriji svaka kolekcija koju je moguće definirati bila smatrana skupom. Stoga je bilo neophodno ispraviti nedostatke ove teorije, što je učinjeno aksiomatskim zasnivanjem teorije skupova.

Niko nas neće izvući iz raja koji je Cantor za nas stvorio!
(David Hilbert)

Ne vidim razlog zašto bi u taj raj ulazili!
(Richard Hamming)

Dakle, iako je Hamming navedenu rečenicu vjerovatno izrekao u šali (jer je Cantorova naivna teorija skupova svakako vrijedna proučavanja), sada bi trebalo biti jasno zašto Cantorov raj nije savršen i odakle potreba za aksiomatskim pristupom postavljanju teorije skupova. Takva teorija, barem po našim sadašnjim saznanjima, je potpuna i ne dovodi do kontradikcija, i zaista je fundamentalna grana matematike. Teorija skupova postavlja temelje matematičkoj analizi, topologiji, algebri, diskretnoj matematici i drugim oblastima. Relacije ekvivalencije i poretka su sveprisutne u matematici, a kao što ćemo vidjeti relacije su skupovi. Pojam funkcije jedan je od najbitnijih matematičkih pojmova, a svaka funkcija je ustvari skup. Većina matematičkih pojmova može biti precizno definirana koristeći isključivo pojmove iz teorije skupova, a tako i većina (ili čak sve) teoreme u matematici mogu biti dokazane iz aksioma teorije skupova. Međutim, kao što je i za očekivati, nije mnogo teorema zaista formalno dokazano koristeći isključivo aksiome teorije skupova jer su ti dokazi uglavnom mnogo duži nego standardni dokazi prezentirani jezikom te matematičke oblasti. Na web stranici `http://us.metamath.org/index.html` možete naći dokaze više od 10 000 teorema koji su izvedeni iz Zermelo-Fraenkelovog sistema aksioma teorije skupova, gdje također možete poslušati kako zvuče neki matematički dokazi.

Poglavlje 2

Aksiomatika i operacije

Kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju, postojala je potreba za aksiomatskim postavljanjem teorije skupova, za što je bilo nekoliko pokušaja. Danas, standardna forma aksiomatske teorije skupova podrazumijeva ZFC aksiomatski sistem, tj. Zermelo-Fraenkelov sistem aksioma ZF0-ZF9, zajedno sa aksiomom izbora AC, koji su detaljno objašnjeni u sekcijama 2.1 i 2.4 skripte Teorija skupova (Predavanja 2012/13). Od studenata/ica se očekuje prvenstveno poznavanje svih aksioma, a zatim je potrebno znati njihovu važnost, te ih naravno znati primjeniti u zadacima. Naime, shvatanje naivne teorije skupova da bilo koju kolekciju možemo smatrati skupom i dovelo je do ranije navedenih paradoksa, zbog čega je bilo i neophodno sistemom aksioma strogo definirati kakve to kolekcije zaista mogu biti skupovi. Studenti/ce trebaju znati dokazati da određene kolekcije jesu ili nisu skupovi.

U ovom poglavlju studenti/ce će se upoznati i sa osnovnim operacijama sa skupovima, a trebati će i znati dokazati neke osnovne skupovne jednakosti. U ovom poglavlju se uvode i bitni matematički pojmovi relacije i funkcije, kao i posebne vrste relacija i funkcija koje su od iznimne važnosti: relacija ekvivalencije i relacija poretka, te injektivna, surjektivna i bijektivna funkcija.

2.1 Zermelo-Fraenkelov sistem aksioma teorije skupova

Kao što i sam naziv kaže, u ovoj sekciji skripte Teorija skupova (Predavanja 2012/13) prezentirane su aksiome ZF0-ZF9 Zermelo-Fraenkel-ovog sistema aksioma, koji je standardan i široko prihvaćen sistem aksioma teorije skupova. Većina ZF aksioma govore o egzistenciji određenih skupova definiranih preko drugih skupova. Tako je uvijek potrebno provjeriti, koristeći date aksiome, da li objekti sa kojima radimo zaista jesu skupovi. U skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) ova je provjera urađena za neke novouvedene pojmove poput produkta skupova, a nakon toga tu činjenicu više ne provjeravamo. Ipak, to ne znači da ne trebamo uvijek obratiti pažnju zašto su objekti koje posmatramo ustvari skupovi. U ovoj sekciji na nekoliko ćemo primjera pokazati zašto određene kolekcije jesu ili nisu skupovi, ali i u nastavku ovog materijala ćemo za još neke kolekcije, nakon što ih formalno uvedemo, dokazati da zaista jesu skupovi. Naprimjer, nakon što definiramo relaciju ekvivalencije, pokazati ćemo da je kolekcija svih klasa ekvivalencije na skupu skup; nakon što uvedemo pojam funkcije, dokazati ćemo da je kolekcija svih funkcija sa datim domenom i kodomenom također skup, i sl.

Prvobitno ćemo se osvrnuti na razrješenje paradoksa spomenutih u prethodnom poglavlju. Naime, iako su Cantor i Russel zaista formirali paradokse u naivnoj teoriji skupova, oni prestaju biti paradoksi u ZF teoriji skupova, što ćemo pokazati u sljedeća dva primjera.

ZADATAK 2.1.1. *Neka je U kolekcija svih skupova. U nije skup.*

Rješenje: Ideja dokaza jeste pokazati da U ne može biti jednak niti jednom skupu, tj. polazeći od bilo kojeg skupa x pokazati ćemo da $U \neq x$. Neka je stoga $x \in U$ proizvoljan skup. Prema ZF3 (Aksiom para) primjenjenom na skup x, kolekcija $\{x, x\}$ je skup. Na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) $\{x, x\} = \{x\}$, pa je $\{x\}$ skup, i to očito neprazan jer $x \in \{x\}$. Prema ZF9 (Aksiom fundacije) primjenjenom na $\{x\} \neq \emptyset$, imamo

$$(\exists y \in \{x\})(\forall z \in \{x\}) \quad z \notin y.$$

Kako $y \in \{x\}$ implicira da je $y = x$, i kako $z \in \{x\}$ implicira da je $z = x$, imamo da

$$x \notin x.$$

Kako je $x \in U$, ali $x \notin x$, onda na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) vrijedi $U \neq x$. Dakle, polazeći od bilo kojeg skupa x, možemo pokazati da $U \neq x$, pa U nije skup. ▲

ZADATAK 2.1.2. *Neka je S kolekcija svih skupova koji ne sadrže samog sebe, tj. $S = \{x \mid x \notin x\}$. S nije skup.*

Rješenje: Kao u prethodnom zadatku, možemo pokazati da za svaki skup x vrijedi $x \notin x$. Dakle, S je ustvari kolekcija svih skupova, pa na osnovu prethodnog zadatka, S nije skup. ▲

ZADATAK 2.1.3. *Za svaka tri skupa A, B i C postoji skup čiji su elementi upravo ta tri skupa.*

Rješenje: Neka su A, B i C dati skupovi. Na osnovu ZF3 (Aksiom para) primjenjenog na skupove A i B, postoji skup $M = \{A, B\}$, a prema istom aksiomu primjenjenog na skup C, postoji skup $N = \{C, C\} \overset{ZF1}{=} \{C\}$. Ako primjenimo ZF3 (Aksiom para) dalje na skupove M i N, zaključujemo da postoji skup $P = \{M, N\} = \{\{A, B\}, \{C\}\}$. Konačno, prema ZF4 (Aksiom unije) primjenjenog na skup P, postoji skup Q koji sadrže sve elemente elemenata od P,

$$q \in Q \quad \Leftrightarrow \quad (\exists t)(t \in P \wedge q \in t).$$

Iz uslova $t \in P$ slijedi da je $t = M = \{A, B\}$ ili $t = N = \{C\}$, pa $q \in t$ implicira da je $q = A$ ili $q = B$ ili $q = C$. Dakle, postoji skup $Q = \{A, B, C\}$. ▲

Dakle, postoji razlika između skupova $\{A, B\}$ i $A \cup B$, čije nam egzistencije iz egzistencije skupova A i B obezbjeđuju redom ZF3 (Aksiom para) i ZF4 (Aksiom unije). Naprimjer, za $A = \{1\}$, $B = \{p, q\}$, imamo

$$\{A, B\} = \{\{1\}, \{p, q\}\} \neq \{1, p, q\} = A \cup B.$$

Zaista, da bi dva skupa bila jednaka, po ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) oni moraju imati iste elemente, a naprimjer $1 \in A \cup B$, dok $1 \notin \{A, B\}$.

ZADATAK 2.1.4. *Za skupove A i B postoji tačno jedan skup C čiji su jedini elementi A i B.*

Rješenje: Neka su A i B proizvoljni skupovi. Na osnovu ZF3 (Aksiom para) primjenjenog na skupove A i B, imamo egzistenciju skupa $C = \{A, B\}$, pa je preostalo pokazati jedinstvenost takvog skupa. Neka je D skup sa istom osobinom. Tada

$$x \in C \quad \Leftrightarrow \quad x = A \vee x = B \quad \Leftrightarrow \quad x \in D,$$

pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) imamo da je $C = D$. ▲

ZADATAK 2.1.5. *Dokazati da ne postoji konačan niz skupova za koje važi*

$$x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni x_1.$$

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, neka postoji konačan niz skupova za koje važi

$$x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni x_1.$$

Posmatrajmo skup $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, koji je očito neprazan jer $x_1 \in A$. Primjetimo da tada, na osnovu date prepostavke, vrijedi

$$(\forall y \in A)(\exists z \in A) \quad z \in y,$$

što je u kontradikciji sa ZF9 (Aksiom fundacije) primjenjenog na skup $A \neq \emptyset$. Naravno, u rješavanju ovog zadatka neophodno je i utvrditi zašto kolekcija A zaista jeste skup (jer inače ne bi smjeli na tu kolekciju pozivati bilo koji od ZF aksioma). To činimo kao u nekom od prethodnih zadataka: primjenjujući ZF3 (Aksiom para) na skupove x_1 i x_2, te x_3 dobijamo da su kolekcije $\{x_1, x_2\}$ i $\{x_3\}$ skupovi, na koje zatim primjenimo ZF4 (Aksiom unije) čime dokazujemo da je kolekcija $\{x_1, x_2, x_3\}$ skup. Ponavljajući ovaj postupak dovoljan broj koraka, dokazujemo da je kolekcija $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skup. ▲

Primjetimo da "$\in$" nije tranzitivna relacija (pojmovi relacija i tranzitivnost biti će objašnjeni u sljedećim sekcijama), tj. da

$$A \in B \in C \quad \not\Rightarrow \quad A \in C.$$

Zaista, ako je npr.

$$\begin{aligned}
&A = \{1, 2, a\},\\
&B = \{\{1, 2, a\}, b, \{z, 3\}\},\\
&C = \{\{\{1, 2, a\}, b, \{z, 3\}\}, c, \{c\}, \{c, 2\}, \emptyset\},
\end{aligned}$$

imamo $A \in B \in C$, ali $A \notin C$.

ZADATAK 2.1.6. *Dati su skupovi* $A = \{5, 1, 3, 2, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 1, 5\}$ *i* $C = \{2, 1, 1, 3, 1, 5, 5\}$. *U kakvom su odnosu skupovi* A *i* B, *te da li vrijedi* $A \subseteq C$, $B \in C$?

Rješenje: Na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) vrijedi $A = B$. Vrijedi $A \subseteq C$, jer je svaki element iz A ujedno i element u C. Na osnovu definicije skupa C, jasno se vidi koji su njegovi elementi, pa očito ne vrijedi $B \in C$. ▲

ZADATAK 2.1.7. *Koji od sljedećih skupova* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ *i* $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{33} - 31x^9 + 22x^7 + 33x^3 - 26x + 1 = 0\}$ *sadrži 1?*

Rješenje: Na osnovu definicije datih skupova, jasno je da vrijedi $1 \in A$, $1 \notin B$, $1 \in C$. ▲

ZADATAK 2.1.8. *Odrediti koji su od sljedećih skupova međusobno jednaki i obrazložiti odgovor.*

(a) $A = \{5, 6, 6, 6, 5, 4\}$ *i* $B = \{4, 5, 6\}$

(b) $C = \{\emptyset\}$ *i* $D = \emptyset$

(c) $E = \{x, y\}$ *i* $F = \{x, \{x\}, \{y\}\}$

(d) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 0\}$ *i* $H = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^{1000} + 5x^2 + 7 = 0\}$

(e) $S = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ *i* $T = \{1, 2, 3\}$.

Rješenje:

(a) Na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti), skupovi A i B imaju iste elemente, pa $A = B$.

(b) Kako $\emptyset \in C$, i $\emptyset \notin D$, jer je D prazan skup pa nema elemenata, na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti), vrijedi $C \neq D$.

(c) Kako naprimjer $y \in E$, ali $y \notin F$, na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) vrijedi $E \neq F$.

(d) Na osnovu definicije skupova G i H, imamo $G = \emptyset$, $H = \emptyset$, pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) vrijedi $G = H$.

(e) Kako naprimjer $1 \in T$ i $1 \notin S$, na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) vrijedi $S \neq T$.

▲

ZADATAK 2.1.9. *Koji skupovi su jednaki:* $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$?

Rješenje: Nikoja dva skupa nisu jednaka. Zaista, $\emptyset$ nema elemenata, pa ne može biti jednak niti jednom od jednočlanih skupova $\{0\}$, $\{\emptyset\}$. Dalje, $\{0\} \neq \{\emptyset\}$, jer naprimjer $0 \in \{0\}$, ali $0 \notin \{\emptyset\}$, pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti), ovi skupovi ne mogu biti jednaki. ▲

ZADATAK 2.1.10. *Neka je* $A = \{2, \{4, 5\}, 4\}$. *Koje tvrdnje nisu tačne i zašto?*

(a) $\{4, 5\} \subseteq A$

(b) $\{4, 5\} \in A$

(c) $\{\{4, 5\}\} \subseteq A$

(d) $5 \in A$

(e) $\{5\} \in A$

(f) $\{5\} \subseteq A$.

Rješenje: Nisu tačne tvrdnje (a), (d), (e) i (f).
Na osnovu definicije podskupa, $P \subseteq Q$ akko je svaki element iz P element i u Q. Kako $5 \in \{4, 5\}$, ali $5 \notin A$, tvrdnja (a) nije tačna.
Na osnovu definicije skupa A, jasno se vidi koji su njegovi elementi, pa tvrdnje

(d) i (e) očito nisu tačne.
Konačno, kako $5 \in \{5\}$, a $5 \notin A$, tvrdnja (e) nije tačna. ▲

ZADATAK 2.1.11. *Neka je $M = \{a, b, c\}$. Zaokružiti tačne iskaze.*

(a) $a \in M$

(b) $a \subseteq M$

(c) $\{b\} \in M$

(d) $\{b\} \subseteq M$.

Rješenje: Tačni iskazi su (a) i (d).
Zaista, na osnovu definicije skupa M očito je da je a element od M, pa je iskaz (a) tačan.
U općem slučaju, iskaz (b) nije tačan. Na osnovu definicije podskupa, $P \subseteq Q$ akko svaki element skupa P ujedno pripada i skupu Q. Ako naprimjer $a = \{1\}$, vidimo da $1 \in a$, ali $1 \notin M$, pa ne vrijedi $a \subseteq M$. Jedini slučajevi kada je iskaz (b) zadovoljen jesu za $a = \emptyset$, $a = \{b\}$, $a = \{c\}$ i $a = \{b, c\}$, tj. kada je a bilo koji podskup od M koji ne sadrži a. Zaista, ranije smo pokazali da za svaki skup x vrijedi $x \notin x$, pa je nemoguće da vrijedi $a \in a$.
U općem slučaju ni iskaz (c) nije tačan. Ako naprimjer $a = c = \emptyset$, onda sigurno ne vrijedi $\{b\} \in M$, jer bi to jedino bilo moguće za $b = \{b\}$, što je nemoguće jer implicira da $b \in b$. Jedini slučajevi kada je iskaz (c) zadovoljen jesu $a = \{b\}$ ili $c = \{b\}$.
Jedini element skupa $\{b\}$ je b, i kako $b \in M$, na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi $\{b\} \subseteq M$, tj. iskaz (d) je tačan. ▲

ZADATAK 2.1.12. *Naći $\mathcal{P}(A)$ ako je $A = \{3, \{1, 4\}\}$.*

Rješenje: Na osnovu definicije partitivnog skupa skupa A, to je skup čiji su elementi svi podskupovi od A, pa je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \{3, \{1, 4\}\}\}.$$

Ako skup A ima n elemenata, poznato je da skup $\mathcal{P}(A)$ ima 2^n elemenata, što nam uvijek može biti od koristi za provjeru pri ispisivanju partitivnog skupa. Tako u ovom zadatku skup A ima 2 elementa, dok partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ ima $2^2 = 4$ elementa. ▲

ZADATAK 2.1.13. *Neka je dat skup $S \neq \emptyset$. Koje tvrdnje nisu tačne i zašto?*

(a) $S \in \mathcal{P}(S)$

(b) $S \subseteq \mathcal{P}(S)$

(c) $\{S\} \in \mathcal{P}(S)$

(d) $\{S\} \subseteq \mathcal{P}(S)$.

Rješenje: Nisu tačne tvrdnje (b) i (c).
Naime, po pretpostavci $S \neq \emptyset$, pa postoji neki $s \in S$. Da bi tvrdnja (b) bila tačna, tj. da bi vrijedilo $S \subseteq \mathcal{P}(S)$, moralo bi da vrijedi $s \in \mathcal{P}(S)$, što na osnovu definicije partitivnog skupa znači da $s \subseteq S$. Primjetite da ovo i dalje ne dovodi do kontradikcije, tj. zaista je moguće da $s \in S$ i $s \subseteq S$, naprimjer ako je $S = \{\{1, 2, 3\}, 1, 2, 3, 4\}$, pri čemu je $s = \{1, 2, 3\}$. Međutim, ako izabaremo $t \in S$ takav da ne postoji niti jedan element $x \in S$ sa osobinom $x \in t$, zaista ćemo dobiti kontradikciju: tada nije moguće da $t \subseteq S$, jer bi to značilo da za sve $y \in t$ mora vrijediti $y \in S$. Primjetite da nam egzistenciju ovakvog elementa $t \in S$, tj. minimalnog elementa u odnosu na relaciju "$\in$" obezbjeđuje ZF9 (Aksiom fundacije) primjenjen na $S \neq \emptyset$. Dakle, (b) nije tačna tvrdnja.
Kako su, po definiciji partitivnog skupa, elementi od $\mathcal{P}(S)$ svi podskupovi od S onda je $\{S\} \in \mathcal{P}(S)$ akko $\{S\} \subseteq S$. Po definiciji podskupa, to bi značilo da $S \in S$, a ranije smo pokazali da za svaki skup vrijedi $S \notin S$, koristeći ZF9 (Aksiom fundacije) primjenjen na skup $\{S\}$. Dakle, tvrdnja (c) nije tačna. ▲

Zadaci za samostalan rad

ZADATAK 2.1.14. *Uporedi sljedeće skupove: A je skup slova u riječi MATEMATIKA, B je skup slova u riječi KINEMATIKA, C je skup slova u riječi TEMATIKA, D je skup slova u riječi $KAMATA$.*

ZADATAK 2.1.15. *Neka su A i B skupovi. Dokazati da su sljedeće kolekcije skupovi*

(a) $\{\{A\} \cup \{B\}\}$

(b) $A \cup \{\{B\}\}$

(c) $\mathcal{P}(\{A\} \cup \{\{A\}\} \cup B)$

ZADATAK 2.1.16. *Naći partitivni skup sljedećih skupova.*

(a) $A = 1, 2$

(b) $B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$

(c) $C = \{\emptyset, \{c\}\}$

(d) $D = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

2.2 Operacije sa skupovima

U ovoj sekciji u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) uvode se pojmovi presjek skupova, razlika skupova, produkt skupova. Studenti/ce trebaju prvobitno usvojiti sve navedene definicije prije pristupanja izradi zadataka u ovoj sekciji, a i neke osobine dokazane na predavanjima ovdje će se koristiti kao gotovi rezultati.

ZADATAK 2.2.1. *Neka su S, A i B skupovi. Dokazati da su tada*

(a) $A \cap B$

(b) $A \setminus B$

(c) $C_S(A)$

(d) $A \times B$

također skupovi.

Rješenje: Neka su S, A i B skupovi.

(a) Prvobitno je potrebno prisjetiti se formalne definicije presjeka dva skupa. U skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) navedena je definicija presjeka skupa L (Definicija 2.2.1) kao kolekcije svih elemenata koji su elementi u svakom skupu iz L, tj.

$$\cap L = \{x \mid (\forall Y)(Y \in L \Rightarrow x \in Y)\},$$

a po definiciji je $A \cap B = \cap L$, gdje je $L = \{A, B\}$. Stoga,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \cap\{A, B\} \\ &= \{x \mid (\forall Y)(Y \in \{A, B\} \Rightarrow x \in Y)\} \\ &= \{x \mid (Y = A \Rightarrow x \in Y) \wedge (Y = B \Rightarrow x \in Y)\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \in A \mid x \in B\}. \end{aligned}$$

Primjenimo li ZF6 (Aksiom podskupa) na skup A i na predikat $P(x)$: $x \in B$, dobijamo da je kolekcija svih elemenata za koje vrijedi $x \in A$ i $P(x)$ skup, a ta kolekcija je upravo $A \cap B$. Dakle, $A \cap B$ je skup.

(b) Po definiciji iz skripte Teorija skupova (Predavanja 2012/13) (Definicija 2.2.5), imamo da je

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in A \mid x \notin B\}, \end{aligned}$$

što je skup na osnovu ZF6 (Aksiom podskupa) primjenjenog na skup A i predikat $P(x) : x \notin B$.

(c) Po definiciji je $C_S(A) = S \setminus A$, pa je činjenica da je komplement skupa također skup posljedica već dokazane tvrdnje (c) primjenjene na skupove S i A.

(d) Na osnovu definicije (Definicija 2.2.7), imamo da je

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Na osnovu definicije uređenog para, primjetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} A \times B &= \{\{\{x\}, \{x, y\}\} \mid x \in A \wedge y \in B\} \\ &= \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)(z = \{\{x\}, \{x, y\}\}). \end{aligned}$$

Na osnovu aksioma ZF5 (Aksiom o partitivnom skupu) primjenjenog prvo na skup $A \cup B$ (prisjetimo se da je $A \cup B$ zaista skup na osnovu aksioma ZF4 primjenjenog na skupove A i B), a zatim na skup $\mathcal{P}(A \cup B)$, imamo da je $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ skup. Konačno, primjenimo li aksiom ZF6 (Aksiom podskupa) na skup $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ i na predikat

$$P(z) : \quad (\exists x \in A)(\exists y \in B)(z = \{\{x\}, \{x, y\}\}),$$

dobijamo da je kolekcija $A \times B$ zaista skup.

▲

Objasniti ćemo da $x \in A$ i $y \in B$ zaista implicira da $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Primjetimo

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \cup B \\ &\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in A, y \in B &\Rightarrow x, y \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq A \cup B \\ &\Leftrightarrow \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B), \end{aligned}$$

pa dalje imamo

$$\begin{aligned} \{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B) &\Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)), \end{aligned}$$

što smo i htjeli pokazati.

Sada kada smo ustanovili da uvedeni pojmovi zaista jesu skupovi, na konkretnom primjeru ćemo primjeniti date definicije kako bi izvršili te operacije sa skupovima.

ZADATAK 2.2.2. *Neka je* $A = \{x, 3\}$ *i* $B = \{1, 3, a\}$*. Orediti uniju, presjek, razlike i proizvode ovih skupova.*

Rješenje: Na osnovu definicija, imamo

$$\begin{aligned}
&A \cup B = \{1, 3, a, x\} \\
&A \cap B = \{3\} \\
&A \setminus B = \{x\} \\
&B \setminus A = \{1, a\} \\
&A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a, 1, x\} \\
&A \times B = \{(x, 1), (x, 3), (x, a), (3, 1), (3, 3), (3, a)\} \\
&B \times A = \{(1, x), (1, 3), (3, x), (3, 3), (a, x), (a, 3)\}.
\end{aligned}$$

▲

U sljedećim zadacima naveden je niz skupovnih jednakosti koje treba pokazati, što uvijek činimo na isti način. Na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti), za skupove L i D vrijedi $L = D$ akko $x \in L \Leftrightarrow x \in D$. U svakom od zadataka, koristeći definicije skupovnih operacija te elemente matematičke logike, pokazati ćemo upravo da $x \in L \Leftrightarrow x \in D$, pri čemu je potrebno objasniti zašto vrijedi svaka u nizu navedenih ekvivalencija.

ZADATAK 2.2.3. *Dokazati sljedeće skupovne jednakosti.*

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(g) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$

(h) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$

(i) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (a), (h) i (i). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(a) Na osnovu definicije unije i komutativnosti disjunkcije, vrijedi

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \quad \vee \quad x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in B \quad \vee \quad x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in B \cup A, \end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$A \cup B = B \cup A.$$

(h) Na osnovu definicije unije, presjeka, distributivnosti disjunkcije prema konjukciji, asocijativnosti disjunkcije i komutativnosti konjukcije, vrijedi

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \cup (C \cap D) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in C \cap D \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad (x \in C \wedge x \in D) \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad x \in C] \quad \wedge \quad [(x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad x \in D] \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in A \vee x \in C) \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C)] \\
& \wedge \quad [(x \in A \vee x \in D) \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in D)] \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \vee x \in C) \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C) \\
& \wedge \quad (x \in A \vee x \in D) \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in D) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cup C \quad \wedge \quad x \in B \cup C \quad \wedge \quad x \in A \cup D \quad \wedge \quad x \in B \cup D \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cup C \quad \wedge \quad x \in A \cup D \quad \wedge \quad x \in B \cup C \quad \wedge \quad x \in B \cup D \\
\Leftrightarrow\ & x \in (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D).$$

(i) Na osnovu definicije unije, presjeka, distributivnosti disjunkcije prema konjukciji, tautologije $p \vee p \Leftrightarrow p$ i tautologije $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, vrijedi

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (A \cap B) \ & \Leftrightarrow\ x \in A \quad \vee \quad x \in A \cap B \\
& \Leftrightarrow\ x \in A \quad \vee \quad (x \in A \wedge x \in B) \\
& \Leftrightarrow\ (x \in A \vee x \in A) \quad \wedge \quad (x \in A \vee x \in B) \\
& \Leftrightarrow\ x \in A \quad \wedge \quad (x \in A \vee x \in B) \\
& \Leftrightarrow\ x \in A.
\end{aligned}$$

Da su navedene dvije tvrdnje zaista tautologije, možemo uočiti iz istinosnih tablica

p	$p \vee p$
$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Na osnovu ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti), zaista vrijedi

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

▲

ZADATAK 2.2.4. *Dokazati sljedeće skupovne jednakosti.*

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

(d) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

(e) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

(f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

(g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(h) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (b), (c) i (h). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(b) Na osnovu definicije razlike, relacije "$\notin$", De Morganovih zakona za konjukciju, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji i definicije unije, vrijedi

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg x \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg(x \in B \quad \wedge \quad x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (\neg x \in B \quad \vee \quad \neg x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \vee \quad x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \vee \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \vee \quad x \in A \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

(c) Na osnovu definicije razlike, relacije "$\notin$", De Morganovih zakona za konjukciju, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji, jednostavnih tautologija $p \wedge \rceil p \Leftrightarrow \perp$ i $\perp \vee p \Leftrightarrow p$, i definicije unije, vrijedi

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (A \setminus B) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin A \setminus B \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg x \in A \setminus B \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg(x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (\neg x \in A \quad \vee \quad \neg x \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin A \quad \vee \quad \neg\neg x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin A \quad \vee \quad x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin A) \quad \vee \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B,
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap B.$$

(h) Na osnovu definicije razlike, relacije "$\notin$", De Morganovih zakona za konjukciju, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji, definicije presjeka i unije, vrijedi

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin B \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg x \in B \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg(x \in B \quad \wedge \quad x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (\neg x \in B \quad \vee \quad \neg x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \vee \quad \neg\neg x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \vee \quad x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \vee \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \vee \quad x \in A \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

▲

ZADATAK 2.2.5. *Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $A \setminus B = A \cap B^C$

(b) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

(c) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$

(d) $(A = B) \wedge (B = C) \Rightarrow (A = C)$

(e) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$

(f) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

(g) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

(h) $A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$

(i) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C)$

(j) $(A \triangle B)^C = A^C \triangle B$

(k) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

(l) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (c), (j) i (k). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(c) Neka vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, tj. neka $x \in A \Rightarrow x \in B$ i $x \in B \Rightarrow x \in C$. Tada vrijedi
$$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C,$$
pa $A \subseteq C$.

(j) Na osnovu definicije komplementa skupa, relacije "$\notin$", definicije simetrične razlike, unije, De Morganovih zakona za disjunkciju i konjukciju, definicije razlike skupova, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji i jednostavnih tautologija $p \wedge \rceil p \Leftrightarrow \perp$ i $p \vee \perp \Leftrightarrow p$, vrijedi

$$\begin{array}{rcl}
x \in (A \triangle B)^C & \Leftrightarrow & x \notin A \triangle B \\
& \Leftrightarrow & \neg x \in A \triangle B \\
& \Leftrightarrow & \neg x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
& \Leftrightarrow & \neg(x \in A \setminus B \quad \vee \quad x \in B \setminus A) \\
& \Leftrightarrow & \neg x \in A \setminus B \quad \wedge \quad \neg x \in B \setminus A \\
& \Leftrightarrow & \neg(x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \wedge \quad \neg(x \in B \quad \wedge \quad x \notin A) \\
& \Leftrightarrow & (\neg x \in A \quad \vee \quad \neg x \notin B) \quad \wedge \quad (\neg x \in B \quad \vee \quad \neg x \notin A) \\
& \Leftrightarrow & (x \notin A \quad \vee \quad x \in B) \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \vee \quad x \in A) \\
& \Leftrightarrow & [(x \notin A \quad \vee \quad x \in B) \quad \wedge \quad x \notin B] \\
& & \vee \quad [(x \notin A \quad \vee \quad x \in B) \quad \wedge \quad x \in A] \\
& \Leftrightarrow & [(x \notin A \wedge x \notin B) \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \notin B)] \\
& & \vee \quad [(x \notin A \wedge x \in A) \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \in A)] \\
& \Leftrightarrow & (x \notin A \wedge x \notin B) \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \in A) \\
& \Leftrightarrow & (x \in A^C \wedge x \notin B) \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \notin A^C) \\
& \Leftrightarrow & x \in A^C \setminus B \quad \vee \quad x \in B \setminus A^C) \\
& \Leftrightarrow & x \in (A^C \setminus B) \cup (B \setminus A^C) \\
& \Leftrightarrow & x \in A^C \triangle B
\end{array}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(A \triangle B)^C = A^C \triangle B.$$

(k) Na osnovu definicije presjeka i partitivnog skupa, vrijedi

$$\begin{array}{rcl}
x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) & \Leftrightarrow & x \in \mathcal{P}(A) \quad \wedge \quad x \in \mathcal{P}(B) \\
& \Leftrightarrow & x \subseteq A \quad \wedge \quad x \subseteq B \\
& \Leftrightarrow & x \subseteq A \cap B \\
& \Leftrightarrow & x \in \mathcal{P}(A \cap B)
\end{array}$$

pa ZF1 (Aksiom ektenzionalnosti) implicira da je zaista

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B).$$

▲

ZADATAK 2.2.6. *Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $(X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)$

(b) $(X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

(c) $(X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2)$

(d) $(X_1 \setminus X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \setminus (X_2 \times Y)$

(e) $A \subseteq X \wedge B \subseteq Y \Rightarrow A \times B \subseteq X \times Y$

(f) $A \subseteq X \wedge B \subseteq Y \Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (b) i (f). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(b) Na osnovu definicije produkta, unije, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji i asocijativnosti disjunkcije, vrijedi

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in (X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) \\
\Leftrightarrow\ & x \in X_1 \cup X_2 \quad \wedge \quad y \in Y_1 \cup Y_2 \\
\Leftrightarrow\ & (x \in X_1 \vee x \in X_2) \quad \wedge \quad (y \in Y_1 \vee y \in Y_2) \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge y \in Y_1] \quad \vee \quad [(x \in x_1 \vee x \in X_2) \wedge y \in Y_2] \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in X_1 \wedge y \in Y_1) \vee (x \in X_2 \wedge y \in Y_1)] \vee [(x \in X_1 \vee y \in Y_2) \vee (x \in X_2 \wedge y \in Y_2)] \\
\Leftrightarrow\ & (x \in X_1 \wedge y \in Y_1) \vee (x \in X_2 \wedge y \in Y_1) \vee (x \in X_1 \vee y \in Y_2) \vee (x \in X_2 \wedge y \in Y_2) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in X_1 \wedge y \in Y_1) \vee (x \in X_1 \wedge y \in Y_2) \vee (x \in X_2 \vee y \in Y_1) \vee (x \in X_2 \wedge y \in Y_2) \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in X_1 \times Y_1 \vee (x, y) \in X_1 \times Y_2 \vee (x, y) \in X_2 \times Y_1 \vee (x, y) \in X_2 \times Y_2 \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2).$$

(f) Neka vrijedi $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$, tj. $x \in A \Rightarrow x \in X$ i $y \in B \Rightarrow y \in Y$. Na osnovu definicije produkta, datih pretpostavki, jednostavne tautologije $p \wedge q \Rightarrow p$, komutativnosti konjukcije i definicije presjeka, vrijedi

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times B \ &\Leftrightarrow\ x \in A \quad \wedge \quad y \in B \\
&\Leftrightarrow\ x \in A \wedge x \in X \quad \wedge \quad y \in B \wedge y \in Y \\
&\Leftrightarrow\ x \in A \wedge y \in Y \quad \wedge \quad x \in X \wedge y \in B \\
&\Leftrightarrow\ (x, y) \in A \times Y \quad \wedge \quad (x, y) \in X \times B \\
&\Leftrightarrow\ (x, y) \in (A \times Y) \cap (X \times B),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B).$$

▲

ZADATAK 2.2.7. *Neka je $A = B \cap C$. Koje od navedenih tvrdnji su tačne?*

(a) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$

(b) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$.

Rješenje: Obje tvrdnje su tačne, i u nastavku je ponuđeno detaljno rješenja primjera (a). Slično se rješava i primjer (b), što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(a) Na osnovu definicije produkta, date pretpostavke $A = B \cap C$, definicije presjeka i komutativnosti konjukcije, vrijedi

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times A &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad y \in A \\
&\Leftrightarrow x \in B \cap C \quad \wedge \quad y \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \in C) \quad \wedge \quad (y \in B \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in B) \quad \wedge \quad (x \in C \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in B \times B \quad \wedge \quad (x, y) \in C \times C \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (B \times B) \cap (C \times C),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$A \times A = (B \times B) \cap (C \times C).$$

▲

ZADATAK 2.2.8. *Neka su* $\{A_i\}_{i\in I}$ *i* $\{B_i\}_{i\in I}$ *dvije familije skupova. Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \cup \big(\bigcup_{i\in I} B_i\big)$

(b) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\bigcap_{i\in I} B_i\big)$

(c) $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \cup \big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$

(d) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \triangle \big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) \subseteq \bigcup_{i\in I}(A_i \triangle B_i)$

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (b) i (d). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(b) Na osnovu definicije presjeka i činjenice

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad [(\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))],$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
x \in \cap_{i\in I}(A_i \cap B_i) \;&\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)(x \in A_i \cap B_i)\\
&\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)(x \in A_i \quad \wedge \quad x \in B_i)\\
&\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)(x \in A_i) \quad \wedge \quad (\forall i \in I)(x \in B_i)\\
&\Leftrightarrow\; x \in \cap_{i\in I} A_i \quad \wedge \quad x \in \cap_{i\in I} B_i\\
&\Leftrightarrow\; x \in (\cap_{i\in I} A_i) \cap (\cap_{i\in I} B_i)
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\bigcap_{i\in I} B_i\big).$$

(d) Na osnovu definicije simetrične razlike, unije, razlike, definicije relacije "$\notin$", De Morganovih zakona za disjunkciju, činjenice

$$[(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(P(x) \vee Q(x)),$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
& x \in (\cup_{i\in I} A_i) \triangle (\cup_{i\in I} \cap B_i) \\
\Leftrightarrow\ & x \in [(\cup_{i\in I} A_i) \setminus (\cup_{i\in I} B_i)] \cup [(\cup_{i\in I} B_i) \setminus (\cup_{i\in I} A_i)] \\
\Leftrightarrow\ & (x \in \cup_{i\in I} A_i \quad \wedge \quad x \notin \cup_{i\in I} B_i) \quad \vee \quad (x \in \cup_{i\in I} B_i \quad \wedge \quad x \notin \cap_{i\in I} A_i) \\
\Leftrightarrow\ & [(\exists i \in I)(x \in A_i) \quad \wedge \quad \neg(\exists j \in I)(x \in B_j)] \\
& \vee \quad [(\exists k \in I)(x \in B_k) \quad \wedge \quad \neg(\exists l \in I)(x \in A_l)] \\
\Leftrightarrow\ & [(\exists i \in I)(x \in A_i) \quad \wedge \quad (\forall j \in I)(x \notin B_j)] \\
& \vee \quad [(\exists k \in I)(x \in B_k) \quad \wedge \quad (\forall l \in I)(x \notin A_l)] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists i \in I)(x \in A_i \quad \wedge \quad x \notin B_i) \quad \vee \quad (\exists k \in I)(x \in B_k \quad \wedge \quad x \notin A_k) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists i \in I)(x \in A_i \setminus B_i) \quad \vee \quad (\exists k \in I)(x \in B_k \setminus A_k)] \\
\Rightarrow\ & (\exists t \in I, t = i \vee t = k)(x \in A_t \setminus B_t \quad \vee \quad x \in B_t \setminus A_t) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists i \in I)(x \in A_i \setminus B_i \quad \vee \quad x \in B_i \setminus A_i) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists i \in I)[x \in (A_i \setminus B_i) \cup (B_i \setminus A_i)] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists i \in I)[x \in A_i \triangle B_i] \\
\Leftrightarrow\ & x \in \cup_{i\in I}(A_i \triangle B_i),
\end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)\triangle(\bigcup_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcup_{i\in I}(A_i \triangle B_i).$$

▲

ZADATAK 2.2.9. *Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Dokazati ili opovrgnuti sljedeće tvrdnje.*

(a) $A \in B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$

(b) $A \subseteq B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$

(c) $A \cap B \subseteq C^C \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$

(d) $A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C$

(e) $A \subseteq (B \cup C)^C \wedge B \subseteq (A \cup C)^C \Rightarrow B = \emptyset.$

Rješenje: Neka su A, B i C proizvoljni skupovi.

(a) Tvrdnja nije tačna. Naprimjer, za skupove $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$ i $C = \{\{\emptyset\}\}$ vrijedi $A \in B$ i $B \in C$, ali $A \notin C$.

(b) Tvrdnja nije tačna. Posmatrajući iste skupove kao u (a), vrijedi $A \subseteq B$ i $B \in C$, ali $A \notin C$.

(c) Tvrdnja je tačna. Neka vrijedi $A \cap B \subseteq C^C$ i $A \cup C \subseteq B$. Tvrdimo da $A \cap C = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno: $A \cap C \neq \emptyset$, tj. da postoji $x \in A \cap C$. Na osnovu činjenice da $A \subseteq A \cup C$, definicije presjeka i datih pretpostavki,

$$\begin{aligned} x \in A \cap C &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \in A \cup C \quad \wedge \quad x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \in B \quad \wedge \quad x \in C \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \quad \wedge \quad x \in C \\ &\Rightarrow x \in C^C \quad \wedge \quad x \in C, \end{aligned}$$

što je kontradikcija, te zaista vrijedi $A \cap C = \emptyset$.

(d) Tvrdnja nije tačna. Naprimjer, za skupove $A = C = \emptyset$ i $B = \{1\}$ vrijedi $A \neq B$ i $B \neq C$, ali $A = C$.

(e) Tvrdnja nije tačna. Naprimjer, ako za univerzalni skup uzmemo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, a $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, onda vrijedi

$$\{1\} = A \subseteq (B \cup C)^C = \{2, 3\}^C = \{1, 4, 5, \dots\},$$

$$\{2\} \subseteq (A \cup C)^C = \{1, 3\}^C = \{2, 4, 5, \dots\},$$

ali $B = \{2\} \neq \emptyset$.

▲

ZADATAK 2.2.10. *Neka su dati skupovi* $A = \{a, \{a, \{a\}\}\}$ *i* $B = \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$. *Odrediti elemente skupa* $(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) \cap (\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A))$.

Rješenje: Na osnovu definicije partitivnog skupa, imamo da je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a, \{a\}\}\}, \{a, \{a, \{a\}\}\}\},$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\{a\}\}, \{\{a, \{a\}\}\}, \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}.$$

Naravno, rješavanje zadatka mogli bismo dalje nastaviti tako što ispišemo i skupove $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A)$, te konačno nađemo njihov presjek, no taj bi proces bio dugotrajan i zamoran, posebice ukoliko bi se radilo

o skupovima A i B koji imaju mnogo više elemenata, pa ćemo taj proces skratiti koristeći osobine skupovnih operacija.
Zaista, na osnovu definicije presjeka, produkta i komutativnosti konjukcije, vrijedi

$$\begin{array}{rl} & (x,y) \in (\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) \cap (\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A)) \\ \Leftrightarrow & (x,y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \quad \wedge \quad (x,y) \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A) \\ \Leftrightarrow & (x \in \mathcal{P}(A) \wedge y \in \mathcal{P}(B)) \quad \wedge \quad (x \in \mathcal{P}(B) \wedge y \in \mathcal{P}(A)) \\ \Leftrightarrow & (x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B)) \quad \wedge \quad (y \in \mathcal{P}(A) \wedge y \in \mathcal{P}(B)) \\ \Leftrightarrow & x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad \wedge \quad y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\ \Leftrightarrow & (x,y) \in (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \times (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \end{array}$$

pa

$$\begin{array}{rl} & (\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) \cap (\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(A)) \\ = & (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \times (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(A)) \\ = & \{\emptyset, \{\{a,\{a\}\}\}\} \times \{\emptyset, \{\{a,\{a\}\}\}\} \\ = & \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset, \{\{a,\{a\}\}\}), (\{\{a,\{a\}\}\}, \emptyset), (\{\{a,\{a\}\}\}, \{\{a,\{a\}\}\})\}. \end{array}$$

▲

Zadaci za samostalan rad

ZADATAK 2.2.11. *U kojem su odnosu skupovi? ("Odrediti odnos" između skupova znači dokazati da su skupovi ili jednaki ili je jedan od podskupova podskup onog drugog, ili su skupovi disjunktni, ili niti jedan od skupova nije podskup onog drugog.)*

(a) $(A \setminus B) \cup [(B \setminus C) \setminus A]$ *i* $B \triangle (C \cup A)$

(b) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$ *i* $(B \cap A) \setminus C$

(c) $(A \setminus B) \cup [B \setminus (A \cup C)]$ *i* $[A \setminus (B \setminus C)] \cup (B \setminus C)$

ZADATAK 2.2.12. *Ako je* $A \subseteq B$*, svaki od skupova* $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B$, $A^C \cap B^C$ *izraziti na jednostavniji način.*

ZADATAK 2.2.13. *Neka je $A_i \subseteq S$ za sve $i \in I$. Dokazati da tada vrijedi:*

(a) $C_S\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} C_S(A_i)$

(b) $C_S\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} C_S(A_i)$.

ZADATAK 2.2.14. *Neka su $\{A_i\}_{i\in I}$ i $\{B_j\}_{j\in J}$ dvije familije skupova. Dokazati sljedeće tvrdnje:*

(a) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$

(b) $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$.

ZADATAK 2.2.15. *Neka su A, B i C skupovi. Riješiti skupovne sisteme, te odrediti potrebne i dovoljne uslove za jedinstvenost rješenja.*

(a) $A \cup X = B \cap X$ *i* $A \cap X = C \cup X$

(b) $A \setminus X = X \setminus B$ *i* $X \setminus A = C \setminus X$

(c) $A \cap X = B \setminus X$ *i* $C \cup X = X \setminus A$.

2.3 Relacije i funkcije

2.3.1 Relacije

Za rješavanje zadataka iz ove sekcije studenti/ce se prvobitno trebaju upoznati sa svim pojmovima iz odgovarajuće sekcije iz skripte Teorija skupova (Predavanja 2012/13). To su pojam relacije, domen i kodomen relacije, kompozicija relacija i inverzna relacija, te definicije nekih najvažnijih osobina binarnih relacija (refleksivnost, antirefleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, asimetričnost, tranzitivnost). Konačno, potrebno je upoznati se sa dvije vrste posebnih i veoma važnih relacija - relacijom ekvivalencije i relacijom poretka, te svim pojmovima koje uz njih vežemo: klasa ekvivalencije i količnički skup, te maksimalan, minimalan, najveći i najmanji element, majoranta, minoranta, supremum i infimum skupa.

ZADATAK 2.3.1. *Dat je skup* $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *i relacija* $\rho \subseteq S \times S$ *definirana sa* $x\rho y$ *akko* $x^2 = y^2$. *Naći* ρ.

Rješenje: Na osnovu definicije relacije ρ, imamo

$$\rho = \{(-2,-2), (-2,2), (-1,-1), (-1,1), (0,0), (1,-1), (1,1), (2,-2), (2,2)\}.$$

▲

ZADATAK 2.3.2. *Dati su skupovi* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{-2, 0, 2\}$ *i relacije*

$$\rho \subseteq A \times B, \quad x\rho y \Leftrightarrow x + y \leq 2,$$

i

$$\varphi \subseteq B \times C, \quad x\varphi y \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

Naći kompoziciju relacija ρ *i* φ, *i inverznu relaciju relacije* φ.

Rješenje: Na osnovu definicije relacija ρ i φ, imamo

$$\rho = \{(1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (3,-1)\},$$

$$\varphi = \{(-1,-2), (-1,0), (0,-2), (0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\},$$

pa

$$\begin{aligned} \varphi \circ \rho &= \{(x,z) \in A \times C \mid (\exists y \in B) \quad [(x,y) \in \rho \quad \wedge \quad (y,z) \in \varphi]\} \\ &= \{(1,-2), (1,0), (1,2), (2,-2), (2,0), (2,2), (3,-2), (3,0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} &= \{(y,x) \in C \times B \mid (x,y) \in \varphi\} \\ &= \{(-2,-1), (0,-1), (-2,0), (0,0), (2,0), (0,1), (2,1)\}. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.3.3. *Neka su $\rho, \sigma, \delta \subseteq A \times A$ binarne relacije. Dokazati da vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

(b) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

(c) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$

(d) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$

(e) $\rho \circ (\sigma \cup \delta) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \delta)$

(f) $\rho \circ (\sigma \cap \delta) = (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \delta)$

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (a), (b) i (c). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(a) Na osnovu definicije inverzne relacije, vrijedi

$$\begin{aligned} (x,y) \in (\rho^{-1})^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (y,x) \in \rho^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \rho, \end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho.$$

(b) Na osnovu definicije inverzne relacije, kompozicije relacija i komutativnosti konjukcije, vrijedi

$$\begin{aligned} (x,y) \in (\rho \circ \sigma)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (y,x) \in \rho \circ \sigma \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists z \in A)((y,z) \in \sigma \quad \wedge \quad (z,x) \in \rho) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists z \in A)((z,y) \in \sigma^{-1} \quad \wedge \quad (x,z) \in \rho^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists z \in A)((x,z) \in \rho^{-1} \quad \wedge \quad (z,y) \in \sigma^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}, \end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}.$$

(c) Na osnovu definicije inverzne relacije i unije skupova, imamo

$$\begin{aligned} (x,y) \in (\rho \cup \sigma)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (y,x) \in \rho \cup \sigma \\ &\Leftrightarrow \quad (y,x) \in \rho \quad \vee \quad (y,x) \in \sigma \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \rho^{-1} \quad \vee \quad (x,y) \in \sigma^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}, \end{aligned}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}.$$

▲

ZADATAK 2.3.4. *Neka je $R \subseteq A \times B$ relacija. Tada vrijedi:*

(a) $D_1(R^{-1}) = D_2(R)$

(b) $D_1(R) = D_2(R^{-1})$

Rješenje:

(a) Na osnovu definicije domena, inverzne relacije i kodomena relacije, vrijedi

$$\begin{array}{rcl} y \in D_1(R^{-1}) & \Leftrightarrow & (\exists x \in A)((y,x) \in R^{-1}) \\ & \Leftrightarrow & (\exists x \in A)((x,y) \in R) \\ & \Leftrightarrow & y \in D_2(R), \end{array} ,$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$D_1(R^{-1}) = D_2(R).$$

(b) Na osnovu definicije domena, inverzne relacije i kodomena relacije, vrijedi

$$\begin{array}{rcl} x \in D_1(R) & \Leftrightarrow & (\exists y \in B)((x,y) \in R) \\ & \Leftrightarrow & (\exists y \in B)((y,x) \in R^{-1}) \\ & \Leftrightarrow & x \in D_2(R^{-1}), \end{array}$$

pa ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) implicira da je zaista

$$D_1(R) = D_2(R^{-1}).$$

▲

U skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) nakon definicije najvažnijih osobina relacija, navedena je i njihova karakterizacija, a u sljedećem zadatku neke od njih ćemo i pokazati, dok se dokaz svih ostalih preporučuje za vježbu.

U sljedećim zadacima ćemo koristiti ili definiciju spomenutih osobina, ili njihovu karakterizaciju, šta god od toga bude prikladnije u datom trenutku.

ZADATAK 2.3.5. *Neka je $\rho \subseteq S \times S$ binarna relacija, i neka je $\Delta = \{(x, x) \mid x \in S\}$. Dokazati sljedeće tvrdnje:*

(a) ρ je refleksivna akko $(\forall x \in S)(x\rho x)$

(b) ρ je simetrična akko $(\forall x, y \in S)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$

(c) ρ je tranzitivna akko $(\forall x, y, z \in S)(x\rho y \land y\rho z \Rightarrow x\rho z)$

Rješenje:

(a) Želimo pokazati da je ρ refleksivna akko $(\forall x \in S)(x\rho x)$. Na osnovu definicije refleksivne relacije, te definicije podskupa, imamo

$$\begin{aligned} \rho \text{ refleksivna} &\Leftrightarrow \Delta \subseteq \rho \\ &\Leftrightarrow (\forall t)(t \in \Delta \Rightarrow t \in \rho) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in S)((x, x) \in \rho) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in S)(x\rho x). \end{aligned}$$

(b) Želimo pokazati da je ρ simetrična akko $(\forall x, y \in S)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$.

$\Rightarrow$) Neka je ρ simetrična relacija, tj. neka $\rho^{-1} = \rho$. Treba dokazati da vrijedi $(\forall x, y \in S)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$. U tu svrhu posmatrajmo $x, y \in S$ proizvoljne, ali takve da vrijedi $x\rho y$. Tvrdimo da vrijedi $y\rho x$. Na osnovu definicije inverzne relacije i simetričnosti relacije ρ, zaista vrijedi

$$\begin{aligned} x\rho y &\Leftrightarrow (x, y) \in \rho \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in \rho^{-1} \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in \rho \\ &\Leftrightarrow y\rho x. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Neka vrijedi $(\forall x, y \in S)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$. Treba dokazati da je ρ simetrična relacija, tj. treba dokazati skupovnu jednakost $\rho^{-1} = \rho$, što ćemo učiniti pokazujući da vrijedi $\rho^{-1} \subseteq \rho$ i $\rho \subseteq \rho^{-1}$.
Na osnovu definicije inverzne relacije i date pretpostavke, vrijedi

$$(y, x) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \rho \Leftrightarrow x\rho y \Rightarrow y\rho x \Leftrightarrow (y, x) \in \rho.$$

Na osnovu date pretpostavke i definicije inverzne relacije, vrijedi

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow x\rho y \Rightarrow y\rho x \Leftrightarrow (y, x) \in \rho \Leftrightarrow (x, y) \in \rho^{-1}.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$t \in \rho^{-1} \Rightarrow t \in \rho \quad \wedge \quad t \in \rho \Rightarrow t \in \rho^{-1},$$

pa imamo

$$t \in \rho^{-1} \Leftrightarrow t \in \rho,$$

što na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) znači da je $\rho^{-1} = \rho$.

(c) Želimo pokazati da je ρ tranzitivna akko $(\forall x, y, z \in S)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.

$\Rightarrow$) Neka je ρ tranzitivna relacija, tj. neka $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Treba dokazati da vrijedi $(\forall x, y, z \in S)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x, y, z \in S$, ali takve da $x\rho y$ i $y\rho z$. Na osnovu definicije kompozicije relacija i tranzitivnosti relacije ρ, zaista vrijedi

$$\begin{aligned} x\rho y \wedge y\rho z &\Leftrightarrow (x, y) \in \rho \quad \wedge \quad (y, z) \in \rho \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in \rho \circ \rho \\ &\Rightarrow (x, z) \in \rho \\ &\Leftrightarrow x\rho z. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Neka vrijedi $(\forall x, y, z \in S)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$. Treba dokazati da je relacija ρ tranzitivna, tj. da vrijedi $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Na osnovu definicije kompozicije relacija i date pretpostavke, zaista vrijedi

$$\begin{aligned} (x, z) \in \rho \circ \rho &\Leftrightarrow (\exists y \in S)((x, y) \in \rho \quad \wedge \quad (y, z) \in \rho) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in S)(x\rho y \quad \wedge \quad y\rho z) \\ &\Rightarrow x\rho z \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in \rho, \end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaključujemo da je $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

▲

ZADATAK 2.3.6. *Koje od datih relacija su refleksivne/simetrične/antisimetrične/tranzitivne?*

(a) Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$*, i* $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\} \subseteq A \times A$*.*

(b) Neka je A *skup svih trouglova u ravni. Relacija* $R \subseteq A \times A$ *definirana je na sljedeći način:* $(x, y) \in R$ *akko su* x *i* y *slični trouglovi.*

(c) Neka je $A = \mathbb{R}$*, a relacija* $R \subseteq A \times A$ *definirana je na sljedeći način:* $(x, y) \in R$ *akko je* $x < y$*.*

(d) Neka je A *neka familija skupova, a relacija* $R \subset A \times A$ *definirana je na sljedeći način:* $(x, y) \in R$ *akko je* $x \subseteq y$*.*

(e) Neka je $A = \mathbb{N}$*, a relacija* $R \subseteq A \times A$ *definirana je na sljedeći način:* $(x, y) \in R$ *akko* $x|y$*.*

(f) Neka je $A = \mathbb{N}$*, a relacija* $R \subseteq A \times A$ *definirana je na sljedeći način:* $(x, y) \in R$ *akko su* x *i* y *relativno prosti.*

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (a), (b), (c) i (f). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(a) Relacija R nije refleksivna jer naprimjer $(2, 2) \notin R$.
Relacija R nije simetrična jer naprimjer $(2, 4) \in R$, ali $(4, 2) \notin R$.
Relacija R je antisimetrična jer zaista ne postoje različiti x i y takvi da $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$.
Relacija R nije tranzitivna jer $(2, 4) \in R$ i $(4, 1) \in R$, ali $(2, 1) \notin R$.

(b) Relacija R je refleksivna jer je svaki trougao sličan samom sebi.
Relacija R je simetrična jer sličnost trouglova x i y implicira sličnost trouglova y i x.
Relacija R nije antisimetrična jer, u općem slučaju, činjenica da su trouglovi x i y slični (a time i y i x zbog simetričnosti relacije R) ne implicira njihovu podudarnost.
Relacija R je tranzitivna, jer činjenica da su trouglovi x i y slični, i y i z slični, zaista implicira i sličnost trouglova x i z.

(c) Relacija R nije refleksivna jer niti za jedan realan broj x ne vrijedi $x < x$.

Relacija R nije simetrična jer činjenica $x < y$ ne implicira da vrijedi i $y < x$.
Relacija R je antisimetrična, jer zaista vrijedi

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \land y < x \Rightarrow x = y).$$

Naime, prisjetimo se da, ukoliko je p netačan iskaz, implikacija $p \Rightarrow q$ je uvijek tačna.
Relacija R je tranzitivna, jer zaista vrijedi

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x < y \land y < z \Rightarrow x < z).$$

(f) Relacija R nije refleksivna jer za sve $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vrijedi $NZD(x, x) = x \neq 1$. Drugim riječima, za sve $x \in \mathbb{N}$ broj x nije relativno prost sam sa sobom, tj. nije u relaciji sam sa sobom.
Relacija R je simetrična jer, ako vrijedi $NZD(x, y) = 1$, onda i $NZD(y, x) = NZD(x, y) = 1$. Drugim riječima, ako su prirodni brojevi x i y relativno prosti, onda su i y i x relativno prosti.
Relacija R nije antisimetrična jer naprimjer $NZD(2, 3) = 1$ i $NZD(3, 2) = 1$, ali $2 \neq 3$. Drugim riječima, ako su x i y relativno prosti (a time i y i x zbog simetričnosti relacije R), to ne znači da su oni jednaki.
Relacija R nije tranzitivna jer naprimjer $NZD(2, 3) = 1$ i $NZD(3, 8) = 1$, ali $NZD(2, 8) = 2 \neq 1$. Drugim riječima, ako su x i y relativno prosti, y i z relativno prosti, to ne znači da su i x i z relativno prosti.

▲

ZADATAK 2.3.7. *Neka su $R, R' \subseteq A \times A$ relacije. Koje od navedenih tvrdnji su tačne? Objasniti.*

(a) Ako je R simetrična, onda je R^{-1} simetrična.

(b) Ako je R antisimetrična, onda je R^{-1} antisimetrična.

(c) Ako je R refleksivna, onda je $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

(d) Ako je R simetrična, onda je $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.

(e) Ako su R i R' tranzitivne, onda je $R \cup R'$ tranzitivna.

(f) Ako su R i R' tranzitivne, onda je $R \cap R'$ tranzitivna.

(g) Ako su R i R' antisimetrične, onda je $R \cup R'$ antisimetrična.

(h) Ako su R i R' antisimetrične, onda je $R \cap R'$ antisimetrična.

(i) Ako su R i R' refleksivne, onda je $R \cup R'$ refleksivna.

(j) Ako su R i R' refleksivne, onda je $R \cap R'$ refleksivna.

(k) Ako su R i R' simetrične, onda je $R \cup R'$ refleksivna.

(l) Ako su R i R' simetrične, onda je $R \cap R'$ refleksivna.

(m) Ako je R tranzitivna, onda je i R^{-1} tranzitivna.

(n) Ako je R refleksivna, R' bilo koja relacija, onda je $R \cup R'$ refleksivna.

(o) Ako je R antirefleksivna i tranzitivna, onda je R antisimetrična.

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (a), (b), (c), (d), (e) i (f). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(a) Tvrdnja (a) je tačna. Zaista, na osnovu definicije simetrične relacije i ranije dokazane činjenice $(R^{-1})^{-1} = R$, vrijedi

$$\begin{aligned} R \text{ simetrična} \quad &\Leftrightarrow \quad R^{-1} = R \\ &\Leftrightarrow \quad R^{-1} = (R^{-1})^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad R^{-1} \text{ simetrična.} \end{aligned}$$

(b) Tvrdnja (b) je tačna. Zaista, na osnovu definicije antisimetrične relacije, ranije dokazane činjenice $(R^{-1})^{-1} = R$ i komutativnosti presjeka, vrijedi

$$\begin{aligned} R \text{ antisimetrična} &\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta \\ &\Leftrightarrow (R^{-1})^{-1} \cap R^{-1} \subseteq \Delta \\ &\Leftrightarrow R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \subseteq \Delta \\ &\Leftrightarrow R^{-1} \text{ antisimetrična.} \end{aligned}$$

(c) Tvrdnja (c) je tačna, osim u posebnom slučaju $A = \emptyset$. Zaista, na osnovu definicije refleksivne, dijagonalne i inverzne relacije, imamo

$$\begin{aligned} R \text{ refleksivna} &\Leftrightarrow \Delta \subseteq R \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A)((x,x) \in R) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A)((x,x) \in R^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \Delta \subseteq R^{-1} \end{aligned}$$

Dakle, $\Delta \subseteq R \cap R^{-1}$, pa zaista vrijedi $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$ (osim u slučaju $A = \emptyset$).

(d) Tvrdnja (d) je tačna, osim u posebnom slučaju $R = \emptyset$. Zaista, na osnovu definicije simetrične relacije

$$R \text{ simetrična} \quad \Leftrightarrow \quad R^{-1} = R$$

pa $R \cap R^{-1} = R \neq \emptyset$ (osim u slučaju $R = \emptyset$).

(e) Tvrdnja (e) nije tačna. Zaista, pokušamo li dokazati ovu tvrdnju, naići ćemo na problem.

Naime, neka su R i R' tranzitivne relacije, tj. neka vrijedi $R \circ R \subseteq R$ i $R' \circ R' \subseteq R'$. Da bi relacija $R \cup R'$ bila tranzitivna, trebalo bi da vrijedi $(R \cup R') \circ (R \cup R') \subseteq R \cup R'$. Međutim, na osnovu ranije dokazane tvrdnje i tranzitivnosti relacija R i R' imamo

$$\begin{aligned} (R \cup R') \circ (R \cup R') &= [(R \cup R') \circ R] \cup [(R \cup R') \circ R'] \\ &= (R \circ R) \cup (R' \circ R) \cup (R \circ R') \cup (R' \circ R') \\ &\subseteq R \cup (R' \circ R) \cup (R \circ R') \cup R', \end{aligned}$$

pa očito ne mora da vrijedi $(R \cup R') \circ (R \cup R') \subseteq R \cup R'$.

Pokažimo da navedena tvrdnja nije tačna i na drugi način, koristeći karakterizaciju tranzitivnosti. Neka vrijedi

$$R \text{ tranzitivna} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x, y, z \in A)((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R),$$

R' tranzitivna $\quad\Leftrightarrow\quad (\forall x,y,z\in A)((x,y)\in R'\wedge(y,z)\in R'\Rightarrow(x,z)\in R')$.

Da bi relacija $R\cup R'$ bila tranzitvina, trebalo bi da vrijedi

$$(\forall x,y,z\in A)((x,y)\in R\cup R'\wedge(y,z)\in R\cup R'\Rightarrow(x,z)\in R\cup R').$$

Međutim,

$$\begin{array}{ll} & (x,y)\in R\cup R' \quad\wedge\quad (y,z)\in R\cup R' \\ \Leftrightarrow & [(x,y)\in R \quad\vee\quad (x,y)\in R'] \quad\wedge\quad [(y,z)\in R \quad\vee\quad (y,z)\in R'], \end{array}$$

što je tačno i u slučaju $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R'$, što dalje očito ne implicira $(x,z)\in R\cup R'$ (jer se ne možemo pozvati ni na tranzitivnost relacije R, niti na tranzitivnost relacije R'). Zaista, posmatramo li skup $A=\{1,2,3\}$, i na njemu tranzitivne relacije $R=\{(1,2)\}$ i $R'=\{(2,3)\}$, uočavamo da relacije $R\cup R'=\{(1,2),(2,3)\}$ nije tranzitivna.

(f) Tvrdnja (f) je tačna.

Naime, neka su R i R' tranzitivne relacije, tj. neka vrijedi $R\circ R\subseteq R$ i $R'\circ R'\subseteq R'$. Želimo pokazati da je relacija $R\cap R'$ tranzitivna, tj. želimo pokazati da vrijedi $(R\cap R')\circ(R\cap R')\subseteq R\cap R'$. Na osnovu ranije dokazane tvrdnje i tranzitivnosti relacija R i R', zaista vrijedi

$$\begin{array}{rcl} (R\cap R')\circ(R\cap R') & = & [(R\cap R')\circ R]\cap[(R\cap R')\circ R'] \\ & = & (R\circ R)\cap(R'\circ R)\cap(R\circ R')\cap(R'\circ R') \\ & \subseteq & R\cap(R'\circ R)\cap(R\circ R')\cap R' \\ & \subseteq & R\cap R' \end{array},$$

pa na osnovu definicije podskupa $(R\cap R')\circ(R\cap R')\subseteq R\cap R'$.

Pokažimo tačnost navedene tvrdnje i koristeći karakterizaciju tranzitivnosti. Neka vrijedi

R tranzitivna $\quad\Leftrightarrow\quad (\forall x,y,z\in A)((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R)$,

R' tranzitivna $\quad\Leftrightarrow\quad (\forall x,y,z\in A)((x,y)\in R'\wedge(y,z)\in R'\Rightarrow(x,z)\in R')$.

Želimo pokazati da je $R\cap R'$ tranzitivna, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall x,y,z\in A)((x,y)\in R\cap R'\wedge(y,z)\in R\cap R'\Rightarrow(x,z)\in R\cap R').$$

U tu svrhu posmatrajmo $x, y, z \in A$ takve da vrijedi $(x,y) \in R \cap R' \wedge (y,z) \in R \cap R'$. Tvrdimo da vrijedi $(x,z) \in R \cap R'$. Na osnovu definicije presjeka, komutativnosti konjukcije i datih pretpostavki, vrijedi

$$\begin{array}{ll} & (x,y) \in R \cap R' \quad \wedge \quad (y,z) \in R \cap R' \\ \Leftrightarrow & [(x,y) \in R \quad \wedge \quad (x,y) \in R'] \quad \wedge \quad [(y,z) \in R \quad \wedge \quad (y,z) \in R'] \\ \Leftrightarrow & [(x,y) \in R \quad \wedge \quad (y,z) \in R] \quad \wedge \quad [(x,y) \in R' \quad \wedge \quad (y,z) \in R'] \\ \Rightarrow & (x,z) \in R \quad \wedge \quad (x,z) \in R' \\ \Leftrightarrow & (x,z) \in R \cap R'. \end{array}$$

▲

ZADATAK 2.3.8. *Kako izgleda grafik refleksivne/simetrične/antisimetrične relacije?*

Rješenje: Grafik refleksivne relacije sadrži dijagonalu, grafik simetrične relacije simetričan je u odnosu na dijagonalu, dok grafik antisimetrične relacije ne sadrži niti jedan par različitih tačaka koje su simetrične u odnosu na dijagonalu. ▲

ZADATAK 2.3.9. *Da li relacija može istovremeno biti simetrična i antisimetrična?*

Rješenje: Svaka relacija $\rho \subseteq \Delta$ istovremeno je i simetrična i antisimetrična, jer tada očito vrijedi i $\rho^{-1} = \rho$ i $\rho \cap \rho^{-1} = \rho \cap \rho = \rho \subseteq \Delta$. ▲

ZADATAK 2.3.10. *Neka je $A = \{1,2,3\}$. Dati primjer relacije $R \subseteq A \times A$ koja nije niti simetrična niti antisimetrična!*

Rješenje: Relacija $R = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ nije niti simetrična niti antisimetrična. Zaista, $(2,3) \in R$, ali $(3,2) \notin R$, pa relacija R nije simetrična. Kako vrijedi $(1,2) \in R$ i $(2,1) \in R$, ali $1 \neq 2$, relacija R nije antisimetrična.
▲

ZADATAK 2.3.11. *Dokazati da su sljedeće relacije relacije ekvivalencije.*

(a) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $x\rho y$ *akko su* x *i* y *iste parnosti. Naći sve klase ekvivalencije.*

(b) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)\rho(c, d)$ *akko* $ad = bc$.

(c) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)\rho(c, d)$ *akko* $a + d = b + c$.

(d) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ *akko* $2|x + y$. *Naći* $A/_\rho$.

(e) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \{1, 2, ..., 15\}^2$, $(a, b)\rho(c, d)$ *akko* $ad = bc$. *Naći klasu ekvivalencije elementa* $(3, 2)$.

(f) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{R}$, $x\rho y$ *akko* $|x| = |y|$. *Naći klase ekvivalencije.*

(g) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{R}$, $x\rho y$ *akko* $x + x^2 = y + y^2$. *Naći klasu ekvivalencije elementa* 0.

(h) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{R}$, $x\rho y$ *akko* $(x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$. *Naći klase ekvivalencije* $[0]_\rho$, $[1]_\rho$ *i* $[2]_\rho$.

(i) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x\rho y$ *akko* $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$. *Naći klasu ekvivalencije* $[3]_\rho$.

(j) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{R}$, $x\rho y$ *akko* $(x + y)(x - y) = 0$. *Naći klase ekvivalencije* $[0]_\rho$ *i* $[7]_\rho$.

(k) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{N}$, $x\rho y$ *akko* $x \equiv y \mod 5$.

(l) $\rho \subseteq A \times A$,

$$A = \{\textit{Alma, Mirela, Maja, Sanja, Sanjin, Aida, Adnan, Neven}\},$$

$x\rho y$ *akko imena osoba* x *i* y *počinju istim slovom. Naći* $A/_\rho$.

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (d), (e) i (h). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(d) Neka je $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relacija data sa $x\rho y$ akko $2|x + y$.

(R) Želimo pokazati da je ρ refleksivna relacija, tj. da

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(2|x+x),$$

što je očito tačno jer $2|2x = x + x$.

(S) Želimo pokazati da je ρ simetrična relacija, tj. da

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z})(2|x+y \quad \Rightarrow \quad 2|y+x),$$

što je tačno jer je sabiranje komutativna operacija u $\mathbb{Z}$, pa $2|y+x = x+y$.

(T) Želimo pokazati da je ρ tranzitivna relacija, tj. da

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})(2|x+y \quad \wedge \quad 2|y+z \quad \Rightarrow \quad 2|x+z).$$

U tu svrhu posmatrajmo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takve da $2|x+y$ i $2|y+z$. To znači da postoje $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x+y = 2m$ i $y+z = 2n$, pa je $x + z = (2m - y) + (2n - y) = 2(m + n - y)$, tj. zaista vrijedi $2|x+z$.

Na osnovu (R), (S) i (T) zaključujemo da je ρ relacija ekvivalencije. Na osnovu definicije količničkog skupa, imamo

$$\begin{aligned} A/_\rho &= \{[x]_\rho \mid x \in A\} \\ &= \{\{y \in A \mid x\rho y\} \mid x \in A\} \\ &= \{\{y \in A \mid 2|x+y\} \mid x \in A\} \\ &= \{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}\}. \end{aligned}$$

(e) Neka je $\rho \subseteq \{1, 2, \ldots, 15\}^2 \times \{1, 2, \ldots, 15\}^2$ relacija data sa $(a, b)\rho(c, d)$ akko $ad = bc$.

(R) Želimo pokazati da je ρ refleksivna relacija, tj. da

$$(\forall (a, b) \in \{1, 2, \ldots, 15\}^2)(ab = ba),$$

što je tačno zbog komutativnosti množenja.

(S) Želimo pokazati da je ρ simetrična relacija, tj. da

$$(\forall (a, b), (c, d) \in \{1, 2, \ldots, 15\}^2)(ad = bc \Rightarrow cb = da),$$

što je ponovno tačno zbog komutativnosti množenja.

(T) Želimo pokazati da je ρ tranzitivna relacija, tj. da

$$(\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \{1,2,\dots,15\}^2)(ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow af = be).$$

U tu svrhu posmatrajmo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \{1,2,\dots,15\}^2$ takve da $ad = bc$ i $cf = de$. Množenjem ove dvije jednakosti dobijamo $adcf = bcde$, tj. zbog komutativnosti množenja $acdf = bcde$, a zatim dijeljenjem ove jednakosti da $dc \neq 0$ dobijamo $af = be$.

Na osnovu (R), (S) i (T) zaključujemo da je ρ relacija ekvivalencije. Odredimo klasu ekvivalencije elementa $(3,2)$.

$$\begin{aligned}
[(3,2)]_\rho &= \{(a,b) \in \{1,2,\dots,15\}^2 \mid (a,b)\rho(3,2)\} \\
&= \{(a,b) \in \{1,2,\dots,15\}^2 \mid 2a = 3b\} \\
&= \{(3,2),(6,4),(9,6),(12,8),(15,10)\}.
\end{aligned}$$

(h) Neka je $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relacija data sa $x\rho y$ akko $(x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$.

(R) Želimo pokazati da je ρ refleksivna relacija, tj. da

$$(\forall x \in \mathbb{R})((x^2 - x^2)(x^4 - 1) = 0),$$

što je očito tačno jer $x^2 - x^2 = 0$.

(S) Želimo pokazati da je ρ simetrična relacija, tj. da

$$(\forall x,y \in \mathbb{R})((x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (y^2-x^2)(y^2x^2-1) = 0),$$

što je tačno jer $(y^2 - x^2)(y^2x^2 - 1) = -(x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$.

(T) Želimo pokazati da je ρ tranzitivna relacija, tj. da

$$\begin{aligned}
(\forall x,y,z \in \mathbb{R})(\quad & (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0 \quad \wedge \quad (y^2 - z^2)(y^2z^2 - 1) = 0 \\
& \Rightarrow \quad (x^2 - z^2)(x^2z^2 - 1) = 0 \ ).
\end{aligned}$$

U tu svrhu posmatrajmo $x,y,z \in \mathbb{R}$ takve da $(x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 0$ i $(y^2 - z^2)(y^2z^2 - 1) = 0$. Na osnovu distributivnosti konjukcije prema disjunkciji i tautalogije $p \vee p \Leftrightarrow p$, imamo

$$\begin{aligned}
& (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0 \quad \wedge \quad (y^2 - z^2)(y^2z^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow \ & (x^2 = y^2 \vee x^2y^2 = 1) \quad \wedge \quad (y^2 = z^2 \vee y^2z^2 = 1) \\
\Leftrightarrow \ & [(x^2 = y^2 \vee x^2y^2 = 1) \wedge y^2 = z^2] \quad \vee \quad [(x^2 = y^2 \vee x^2y^2 = 1) \wedge y^2z^2 = 1] \\
\Leftrightarrow \ & (x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2) \quad \vee \quad (x^2y^2 = 1 \wedge y^2 = z^2) \\
& \vee \quad (x^2 = y^2 \wedge y^2z^2 = 1) \quad \vee \quad (x^2y^2 = 1 \wedge y^2z^2 = 1) \\
\Rightarrow \ & x^2 = z^2 \quad \vee \quad x^2z^2 = 1 \quad \vee \quad x^2z^2 = 1 \quad \vee \quad x^2 = z^2 \\
\Leftrightarrow \ & x^2 - z^2 = 0 \quad \vee \quad x^2z^2 = 1 \\
\Leftrightarrow \ & (x^2 - z^2)(x^2z^2 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Na osnovu (R), (S) i (T) zaključujemo da je ρ relacija ekvivalencije. Odredimo klase ekvivalencije $[0]_\rho$, $[1]_\rho$ i $[2]_\rho$.

$$\begin{aligned} [0]_\rho &= \{x \in \mathbb{R} \mid x\rho 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 0^2)(x^2 \cdot 0^2 - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 = 0\} \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1]_\rho &= \{x \in \mathbb{R} \mid x\rho 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \cdot (x^2 - 1^2)(x^2 \cdot 1^2 - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \cdot (x^2 - 1)^2 = 0\} \\ &= \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2]_\rho &= \{x \in \mathbb{R} \mid x\rho 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 2^2)(x^2 \cdot 2^2 - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 4)(4x^2 - 1) = 0\} \\ &= \{-2, 2, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 2.3.12. *Neka su $R, R' \subseteq A \times A$ relacije ekvivalencije. Dokazati da vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) R^{-1} je relacija ekvivalencije.

(b) $R \circ R'$ je relacija ekvivalencije akko $R \circ R' = R' \circ R$.

Rješenje: Neka su $R, R' \subseteq A \times A$ relacije ekvivalencije.

(a) Trebamo pokazati da je i R^{-1} relacija ekvivalencije, tj. da je R^{-1} refleksivna, simetrična i tranzitivna.

(R) Želimo pokazati da je R^{-1} refleksivna relacija, tj. da $\Delta \subseteq R^{-1}$. Na osnovu refleksivnosti relacije R i definicije inverzne relacije, imamo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned} (x, x) \in \Delta &\Rightarrow (x, x) \in R \\ &\Rightarrow (x, x) \in R^{-1}, \end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi $\Delta \subseteq R^{-1}$.

(S) Želimo pokazati da je R^{-1} simetrična relacija, tj. da $(R^{-1})^{-1} = R^{-1}$. Kako vrijedi $(R^{-1})^{-1} = R$, treba pokazati da je $R = R^{-1}$, što je tačno jer je po pretpostavci R simetrična relacija.

(T) Želimo pokazati da je R^{-1} tranzitivna relacija, tj. da $R^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R^{-1}$. Na osnovu definicije kompozicije relacija i inverzne relacije, komutativnosti konjukcije, tranzitivnosti relacije R, imamo sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in R^{-1} \circ R^{-1} &\Leftrightarrow (\exists a \in A)((x,a) \in R^{-1} \wedge (a,y) \in R^{-1}) \\
&\Leftrightarrow (\exists a \in A)((x,a) \in R \wedge (y,a) \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists a \in A)((y,a) \in R \wedge (a,x) \in R \\
&\Leftrightarrow (y,x) \in R \circ R \\
&\Rightarrow (y,x) \in R \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1},
\end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi $R^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R^{-1}$.

Dakle, R^{-1} je relacija ekvivalencije.

(b) Trebamo pokazati da je $R \circ R'$ relacija ekvivalencije akko $R \circ R' = R' \circ R$.

$\Rightarrow$) Neka je $R \circ R'$ relacija ekvivalencije. Trebamo pokazati da je $R \circ R' = R' \circ R$. Na osnovu simetričnosti relacije $R \circ R'$, ranije dokazane činjenice da $(R \circ R')^{-1} = R'^{-1} \circ R^{-1}$ i simetričnosti relacija R' i R, imamo

$$\begin{aligned}
R \circ R' &= (R \circ R')^{-1} \\
&= R'^{-1} \circ R^{-1} \\
&= R' \circ R.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Neka je $R \circ R' = R' \circ R$. Trebamo pokazati da je $R \circ R'$ relacija ekvivalencije.

(R) Želimo pokazati da je $R \circ R'$ refleksivna relacija, tj. da vrijedi $\Delta \subseteq R \circ R'$. Na osnovu refleksivnosti relacija R' i R i definicije kompozicije relacija, zaista vrijedi

$$\begin{aligned}
(x,x) \in \Delta &\Rightarrow x \in R' \quad \wedge \quad x \in R \\
&\Leftrightarrow (\exists a = x \in A)((x,a) \in R' \quad \wedge \quad (a,x) \in R) \\
&\Leftrightarrow (x,x) \in R \circ R',
\end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi $\Delta \subseteq R \circ R'$.

(S) Želimo pokazati da je $R \circ R'$ simetrična relacija, tj. da vrijedi $(R \circ R')^{-1} = R \circ R'$. Na osnovu ranije dokazane činjenice $(R \circ R')^{-1} = R'^{-1} \circ R^{-1}$, simetričnosti relacija R' i R, i date pretpostavke $R \circ R' = R' \circ R$, zaista vrijedi

$$\begin{aligned}(R \circ R')^{-1} &= R'^{-1} \circ R^{-1} \\ &= R' \circ R \\ &= R \circ R'.\end{aligned}$$

(T) Želimo pokazati da je $R \circ R'$ tranzitivna relacija, tj. da vrijedi $(R \circ R') \circ (R \circ R') \subseteq R \circ R'$. Na osnovu definicije kompozicije relacija, tautologije

$$[(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists y)(Q(y))] \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)),$$

komutativnosti konjukcije, date pretpostavke $R \circ R' = R' \circ R$ i tranzitivnosti relacija R' i R, zaista vrijedi

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in (R \circ R') \circ (R \circ R') \\
\Leftrightarrow\ & (\exists a \in A)[(x,a) \in R \circ R' \quad \wedge \quad (a,y) \in R \circ R'] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists a \in A)[(\exists b \in A)((x,b) \in R' \wedge (b,a) \in R) \\
& \wedge \quad (\exists c \in A)((a,c) \in R' \wedge (c,y) \in R)] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists a \in A)(\exists b \in A)(\exists c \in A) \\
& [((x,b) \in R' \wedge (b,a) \in R) \quad \wedge \quad ((a,c) \in R' \wedge (c,y) \in R)] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists a \in A)(\exists b \in A)(\exists c \in A) \\
& [(x,b) \in R' \quad \wedge \quad ((b,a) \in R \wedge (a,c) \in R') \quad \wedge \quad (c,y) \in R] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b \in A)(\exists c \in A) \\
& [(x,b) \in R' \quad \wedge \quad (\exists a \in A)((b,a) \in R \wedge (a,c) \in R') \quad \wedge \quad (c,y) \in R] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b \in A)(\exists c \in A) \\
& [(x,b) \in R' \quad \wedge \quad (b,c) \in R' \circ R \quad \wedge \quad (c,y) \in R] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b \in A)(\exists c \in A) \\
& [(x,b) \in R' \quad \wedge \quad (b,c) \in R \circ R' \quad \wedge \quad (c,y) \in R] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b \in A)(\exists c \in A) \\
& [(x,b) \in R' \quad \wedge \quad (\exists d \in A)((b,d) \in R' \wedge (d,c) \in R) \quad \wedge \quad (c,y) \in R] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b \in A)(\exists c \in A)(\exists d \in A) \\
& [(x,b) \in R' \quad \wedge \quad ((b,d) \in R' \wedge (d,c) \in R) \quad \wedge \quad (c,y) \in R] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists b \in A)(\exists c \in A)(\exists d \in A) \\
& [((x,b) \in R' \wedge (b,d) \in R') \quad \wedge \quad ((d,c) \in R \wedge (c,y) \in R)] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists d \in A)[(\exists b \in A)((x,b) \in R' \wedge (b,d) \in R') \\
& \wedge \quad (\exists c \in A)((d,c) \in R \wedge (c,y) \in R)] \\
\Leftrightarrow\ & (\exists d \in A)((x,d) \in R' \circ R' \quad \wedge \quad (d,y) \in R \circ R) \\
\Rightarrow\ & (\exists d \in A)((x,d) \in R' \quad \wedge \quad (d,y) \in R) \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in R \circ R',
\end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi $(R \circ R') \circ (R \circ R') \subseteq R \circ R'$.

Na osnovu (R), (S) i (T) zaključujemo da je ρ relacija ekvivalencije.

▲

ZADATAK 2.3.13. *Dokazati da su sljedeće relacije relacije poretka. Da li su to relacije potpunog uređenja?*

(a) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathcal{P}(S)$ $(S \neq \emptyset)$, $M \rho N$ *akko* $M \subseteq N$.

(b) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathcal{P}(S)$ $(S \neq \emptyset)$, $M \rho N$ *akko* $M \setminus N = \emptyset$.

(c) $\rho \subseteq A \times A$, $A = \mathbb{N}$, $x \rho y$ *akko* $x|y$.

Rješenje: U nastavku su ponuđena detaljna rješenja primjera (a) i (b). Slično se rješavaju i ostali primjeri, što je ostavljeno studentima/cama za vježbu.

(a) Neka je $\rho \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ relacija data sa $M \rho N$ akko $M \subseteq N$.

(R) Želimo pokazati da je ρ refleksivna relacija, tj. da

$$(\forall M \in \mathcal{P}(S))(M \subseteq M),$$

što je očito tačno na osnovu definicije podskupa.

(AS) Želimo pokazati da je ρ antisimetrična relacija, tj. da

$$(\forall M, N \in \mathcal{P}(S))(M \subseteq N \quad \wedge \quad N \subseteq M \quad \Rightarrow \quad M = N),$$

što je očito tačno na osnovu definicije podskupa i ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti).

(T) Želimo pokazati da je ρ tranzitivna relacija, tj. da

$$(\forall M, N, P \in \mathcal{P}(S))(M \subseteq N \quad \wedge \quad N \subseteq P \quad \Rightarrow \quad M \subseteq P),$$

što je tačno na osnovu definicije podskupa i tranzitivnosti implikacije.

Na osnovu (R), (AS) i (T) zaključujemo da je ρ relacija poretka. Relacija ρ nije relacija potpunog uređenja, jer mogu postojati skupovi $M, N \in \mathcal{P}(S)$ takvi da ne vrijedi ni $M \subseteq N$, ni $N \subseteq M$. Naprimjer, za skupove $S = \{1, 2\}$, $M = \{1\}$ i $N = \{2\}$, imamo $M \nsubseteq N$ i $N \nsubseteq M$.

(b) Neka je $\rho \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ relacija data sa $M \rho N$ akko $M \setminus N = \emptyset$.

(R) Želimo pokazati da je ρ refleksivna relacija, tj. da

$$(\forall M \in \mathcal{P}(S))(M \setminus M = \emptyset),$$

što je očito tačno na osnovu definicije razlike skupova.

(AS) Želimo pokazati da je ρ antisimetrična relacija, tj. da

$$(\forall M, N \in \mathcal{P}(S))(M \setminus N = \emptyset \quad \wedge \quad N \setminus M = \emptyset \quad \Rightarrow \quad M = N).$$

Neka su $M, N \in \mathcal{P}(S)$ takvi da $M \setminus N = \emptyset$ i $N \setminus M = \emptyset$. Želimo pokazati da je $M = N$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da vrijedi $M \neq N$. Na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti), definicije razlike skupova i tautologije $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))]$ imamo

$$\begin{aligned} M \neq N &\Leftrightarrow (\exists x \in S)[(x \in M \wedge x \notin N) \quad \vee \quad (x \in N \wedge x \notin M)] \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in S)(x \in M \setminus N \quad \vee \quad x \in N \setminus M) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in S)(x \in M \setminus N) \quad \vee \quad (\exists x \in S)(x \in N \setminus M) \\ &\Leftrightarrow M \setminus N \neq \emptyset \quad \vee \quad x \in N \setminus M \neq \emptyset, \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle, zaista vrijedi $M = N$.

(T) Želimo pokazati da je ρ tranzitivna relacija, tj. da

$$(\forall M, N, P \in \mathcal{P}(S))(M \setminus N = \emptyset \quad \wedge \quad N \setminus P = \emptyset \quad \Rightarrow \quad M \setminus P = \emptyset).$$

Neka su $M, N, P \in \mathcal{P}(S)$ takvi da $M \setminus N = \emptyset$ i $N \setminus P = \emptyset$. Želimo pokazati da je $M \setminus P = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da vrijedi $M \setminus P \neq \emptyset$. Na osnovu definicije razlike skupova, jednostavne tautologije $p \Leftrightarrow p \wedge \top$, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji, imamo

$$\begin{aligned} & M \setminus P \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in S)(x \in M \setminus P) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in S)(x \in M \wedge x \notin P) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in S)[(x \in M \wedge x \notin P) \quad \wedge \quad (x \in N \vee x \notin N)] \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in S)\{[(x \in M \wedge x \notin P) \wedge x \in N] \quad \vee \quad [(x \in M \wedge x \notin P) \wedge x \notin N]\} \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in S)\{[(x \in M \wedge x \in N) \wedge (x \notin P \wedge x \in N)] \\ & \vee \quad [(x \in M \wedge x \notin N) \wedge (x \notin P \wedge x \notin N)] \\ \Rightarrow\ & (\exists x \in S)[(x \in N \wedge x \notin P) \quad \vee \quad (x \in M \wedge x \notin N)] \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in S)(x \in N \setminus P \quad \vee \quad x \in M \setminus N) \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle, zaista vrijedi $M \setminus P = \emptyset$.

Na osnovu (R), (AS) i (T) zaključujemo da je ρ relacija poretka. Relacija ρ nije relacija potpunog uređenja, jer mogu postojati skupovi $M, N \in \mathcal{P}(S)$ takvi da ne vrijedi ni $M \setminus N = \emptyset$, ni $N \setminus M = \emptyset$. Naprimjer, za skupove $S = \{1, 2\}$, $M = \{1\}$ i $N = \{2\}$, imamo $M \setminus N = \{1\} \neq \emptyset$ i $N \setminus M = \{2\} \neq \emptyset$.

Primjetimo da na osnovu definicije praznog skupa, razlike skupova, De Morganovih zakona za disjunkciju, jednostavne tautologije $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
M \setminus N = \emptyset &\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in M \setminus N) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\neg x \in M \setminus N) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)[\neg(x \in M \wedge x \notin N)] \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\neg x \in M \vee x \in N) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(x \in M \Rightarrow x \in N) \\
&\Leftrightarrow M \subseteq N,
\end{aligned}$$

tj. relacije (a) i (b) su ekvivalentne, pa je bilo dovoljno ispitati osobine (R), (AS) i (T) samo za jednu od njih.

▲

ZADATAK 2.3.14. *Neka je $R \subseteq X \times X$ relacija poretka i neka je $S \subseteq X$. Tada je $R \cap (S \times S)$ relacija poretka. Dokazati.*

Rješenje:

(S) Želimo pokazati da je $R \cap (S \times S)$ refleksivna relacija, tj. da $\Delta_S \subseteq R \cap (S \times S)$. Kako je R refleksivna vrijedi $\Delta_S \subseteq \Delta \subseteq R$, a zbog očite činjenice $\Delta_S \subseteq S \times S$ dalje dobijamo da je zaista $\Delta_S \subseteq R \cap (S \times S)$.

(AS) Želimo pokazati da je $R \cap (S \times S)$ antisimetrična relacija, tj. da $[R \cap (S \times S)] \cap [R \cap (S \times S)]^{-1} \subseteq \Delta_S$. Na osnovu ranije dokazane činjenice $[R \cap (S \times S)]^{-1} = R^{-1} \cap (S \times S)^{-1}$, komutativnosti presjeka i antisimetričnosti relacije R, zaista vrijedi

$$\begin{aligned}
[R \cap (S \times S)] \cap [R \cap (S \times S)]^{-1} &= [R \cap (S \times S)] \cap [R^{-1} \cap (S \times S)^{-1}] \\
&= [R \cap (S \times S)] \cap [R^{-1} \cap (S \times S)] \\
&= (R \cap R^{-1}) \cap (S \times S) \\
&\subseteq \Delta \cap (S \times S) \\
&= \Delta_S.
\end{aligned}$$

(T) Želimo pokazati da je $R \cap (S \times S)$ tranzitivna relacija, tj. da $[R \cap (S \times S)] \circ [R \cap (S \times S)] \subseteq R \cap (S \times S)$. Na osnovu definicije kompozicije relacija, definicije presjeka, komutativnosti konjukcije, činjenice

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad [(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))],$$

tranzitivnosti relacije R i definicije produkta, imamo

$$\begin{array}{ll} & (x,y) \in [R \cap (S \times S)] \circ [R \cap (S \times S)] \\ \Leftrightarrow & (\exists a \in X)[(x,a) \in R \cap (S \times S) \quad \wedge \quad (a,y) \in R \cap (S \times S)] \\ \Leftrightarrow & (\exists a \in X)[((x,a) \in R \wedge (x,a) \in S \times S) \quad \wedge \quad ((a,y) \in R \wedge (a,y) \in S \times S)] \\ \Leftrightarrow & (\exists a \in X)[((x,a) \in R \wedge (a,y) \in R) \quad \wedge \quad ((x,a) \in S \times S \wedge (a,y) \in S \times S)] \\ \Leftrightarrow & (\exists a \in X)((x,a) \in R \wedge (a,y) \in R) \quad \wedge \\ & (\exists a \in X)((x,a) \in S \times S \wedge (a,y) \in S \times S) \\ \Rightarrow & (x,y) \in R \circ R \quad \wedge \quad (x \in S \wedge y \in S) \\ \Rightarrow & (x,y) \in R \quad \wedge \quad (x,y) \in S \times S \\ \Leftrightarrow & (x,y) \in R \cap (S \times S), \end{array}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi

$$[R \cap (S \times S)] \circ [R \cap (S \times S)] \subseteq R \cap (S \times S).$$

Na osnovu (R), (AS) i (T) zaključujemo da je $R \cap (S \times S)$ relacija poretka.
▲

ZADATAK 2.3.15. *Neka je* $X = \{$*Ilvana, Aida, Miloš, Alma, Ivan*$\}$ *i*

$$\begin{array}{rcl} \rho & = & \{\ (\text{Ilvana, Ilvana}), (\text{Ilvana, Aida}), (\text{Ilvana, Miloš}), \\ & & (\text{Ilvana, Ivan}), (\text{Aida, Aida}), (\text{Miloš, Alma}), (\text{Ivan, Ivan})\ \}. \end{array}$$

(a) Dopuniti relaciju $\rho \subseteq X \times X$ *do najmanje relacije poretka.*

(b) Naći minimalne i maksimalne elemente skupa (X, ρ).

(c) Naći najmanji i najveći element skupa (X, ρ).

(d) Naći infimum i supremum skupa (A, ρ), *gdje je* $A = \{$*Ilvana, Miloš*$\}$.

Rješenje:

(a) Da bi ρ bila relacija poretka, treba biti refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Da bi ρ bila refleksivna, potrebno je dodati elemente (Miloš, Miloš), (Alma, Alma). Relacija ρ je već antisimetrična. Kako (Ilvana, Miloš)$\in \rho$ i (Miloš, Alma)$\in \rho$, da bi relacija ρ bila tranzitivna potrebno je dodati i element (Ivana, Alma). Dakle,

$$\begin{aligned} \rho \;=\; \{ & \text{(Ilvana, Ilvana), (Ilvana, Aida), (Ilvana, Miloš), (Ilvana, Ivan),} \\ & \text{(Aida, Aida), (Miloš, Alma), (Ivan, Ivan), (Miloš, Miloš),} \\ & \text{(Alma, Alma), (Ilvana, Alma)} \}. \end{aligned}$$

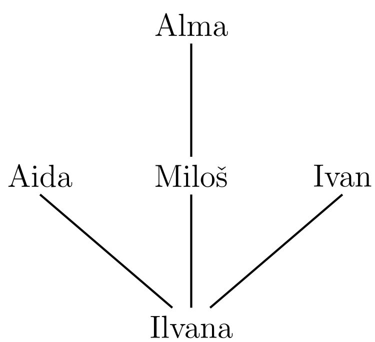
(b) Minimalni element skupa X je Ilvana, jer ne postoji nijedan element u X koji je manji od Ilvane osim nje same, tj. ne postoji nijedan $x \in X$, $x \neq$ Ilvana takav da (x, Ilvana) $\in \rho$.
Maksimalni elementi skupa X su Aida, Ivan, Alma jer ne postoji nijedan element u X koji je veći od njih, osim njih samih. Naprimjer, Aida je maksimalni element skupa X jer ne postoji nijedan $x \in X$, $x \neq$ Aida takav da (Aida, x) $\in \rho$.

(c) Najmanji element skupa X je Ilvana, jer je to minimalni element koji je uporediv sa svim elementima skupa X. Drugim riječima, za sve $x \in X$ vrijedi (Ilvana, x) $\in \rho$.
Najveći element skupa X ne postoji, jer ne postoji nijedan maksimalni element skupa X koji je uporediv sa svim elementima skupa X, tj. ne postoji $m \in X$ takav da za sve $x \in X$ vrijedi $(x, m) \in \rho$. Isto smo mogli zaključiti pozivajući se na rezultat da ukoliko postoji najveći element skupa, on je ujedno i jedinstven maksimalan element tog skupa, a na osnovu (b) poznato je da skup X ima nekoliko različitih maksimalnih elemenata.

(d) Neka je $A =$ {Ilvana, Miloš}.
Na osnovu defnicije, infimum skupa A je najveći element skupa svih minoranti skupa A u X. Minoranta skupa A su svi elementi $x \in X$ koji su manji i od Ilvane i od Miloša, tj. svi elementi $x \in X$ za koje vrijedi (x, Ilvana) $\in \rho$ i (x, Miloš) $\in \rho$. Tu osobinu zadovoljava jedino Ilvana, jer vrijedi (Ilvana, Ilvana)$\in \rho$ i (Ilvana, Miloš)$\in \rho$, pa je skup svih minoranti skupa A u X skup { Ilvana }. Dakle, infimum skupa A u X je najveći element ovog skupa, pa je inf $A =$Ilvana.

Na osnovu defnicije, supremum skupa A je najmanji element skupa svih majoranti skupa A u X. Majoranta skupa A su svi elementi $x \in X$ koji su veći i od Ilvane i od Miloša, tj. svi elementi $x \in X$ za koje vrijedi (Ilvana, x) $\in \rho$ i (Miloš, x) $\in \rho$. Tu osobinu zadovoljavaju Miloš i Alma, jer vrijedi (Ilvana, Miloš)$\in$ ρ i (Miloš, Miloš)$\in$ ρ, te (Ilvana, Alma)$\in$ ρ i (Miloš, Alma)$\in$ ρ,pa je skup svih majoranti skupa A u X skup {Miloš, Alma}. Dakle, supremum skupa A u X je najmanji element ovog skupa, pa je $\sup A =$Miloš. Primjetimo da najmanji element skupa svih majoranti {Miloš, Alma} određujemo isto kao što smo određivali najmanji element skupa X u zadatku (c), tražeći element tog skupa koji je manji od svih. Kako (Miloš, Alma)$\in$ ρ i (Miloš, Miloš)$\in$ ρ, to ustvari znači da je Miloš najmanji element posmatranog skupa.

Sve navedene tvrdnje jednostavno provjeravamo koristeći se sljedećim dijagramom.



▲

ZADATAK 2.3.16. *Neka je* $\rho \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *relacija poretka definirana na sljedeći način*

$$x\rho y \text{ akko } x|y.$$

Da li skup $(\mathbb{N}_0, \rho)$ *ima najmanji i najveći element?*

Rješenje: Na osnovu definicije, $a \in \mathbb{N}_0$ je najmanji element akko za svaki $x \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $a|x$, pa je $a = 1$ najmanji element. Na osnovu definicije, $b \in \mathbb{N}_0$ je najveći element akko za svaki $x \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $x|b$, pa je $b = 0$ najveći element. ▲

ZADATAK 2.3.17. *Dat je skup* $A = \{13, 3, 18, -1\}$. *Skup* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *je parcijalno uređen.*

(a) Odrediti najmanji i najveći element skupa $\mathcal{P}(A)$.

(b) Za skup $X = \{\{13, 18\}, \{13, -1\}, \{13\}\} \subset \mathcal{P}(A)$ *odrediti skup majoranti, skup minoranti, te* $\sup X$, $\inf X$.

Rješenje:

(a) Na osnovu definicije, $M \in \mathcal{P}(A)$ je najmanji element akko za svaki $S \in \mathcal{P}(A)$ vrijedi $M \subseteq S$, pa je $M = \emptyset$ najmanji element. Na osnovu definicije, $N \in \mathcal{P}(A)$ je najveći element akko za svaki $S \in \mathcal{P}(A)$ vrijedi $S \subseteq N$, pa je $N = A$ najveći element.

(b) Na osnovu definicija majorante i minorante, skup majoranti skupa X je $\{\{13, 18, -1\}, A\}$, a skup minoranti skupa X je $\{\emptyset, \{13\}\}$. Supremum je najmanja majoranta, pa je $\sup X = \{13, 18, -1\}$. Infimum je najveća majoranta, pa je $\inf X = \{13\}$.

▲

Zadaci za samostalan rad

ZADATAK 2.3.18. *Neka su* $X = \{1, 3, a\}, Y = \{2, 5, z\}$. *Šta od navedenog predstavlja relaciju iz skupa* X *u skup* Y?

(a) $\emptyset$

(b) $\{(3, 2), (3, 5), (a, 5), (a, z)\}$

(c) $(1, 5)$

(d) $\{(a, 5)\}$

(e) $\{3\}$

(f) $\{(1, z), (3, z)\}$

(g) X

ZADATAK 2.3.19. *Neka su binarne relacije R_1 i R_2 date tablično*

R_1	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	1
d	0	0	1	1

R_2	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	1	1	1	0
c	1	1	1	0
d	0	0	0	1

Odrediti relacije R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$.

ZADATAK 2.3.20. *Dati su skupovi* $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ *i relacije*

$$\rho \subseteq A \times B, \quad x\rho y \Leftrightarrow x + y > 0,$$

i

$$\varphi \subseteq B \times C, \quad x\varphi y \Leftrightarrow x + y < 4.$$

Naći $(\varphi \circ \rho)^{-1}$.

ZADATAK 2.3.21. *Odrediti inverznu relaciju relacije* $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *ako je*

(a) $\rho = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

(b) $\rho = \emptyset$

(c) ρ *je relacija* "$\leq$"

(d) ρ *je relacija* "$=$"

ZADATAK 2.3.22. *Neka je* $X = \{0,1,2,3\}$. *Koji od navedenih skupova su refleksivne relacije nad skupom* X?

(a) $\rho = \emptyset$

(b) $\rho = \{(0,0)\}$

(c) $\rho = \{(0,0),(1,1),(2,2),3\}$

(d) $\rho = \{(0,0),(1,1),(3,3),(2,3),(2,2)\}$

(e) $\rho = \{(2,2)\}$

(f) $\rho = X \times X$

(g) $\rho = \{(0,0),(1,2),(0,1),(1,1),(2,2),(3,2),(3,4),(3,3)\}$

ZADATAK 2.3.23. *Neka je* $X = \{a,b,c,d,e\}$. *Dopuniti relaciju* ρ *do najmanje refleksivne relacije, ako je*

(a) $\rho = \{(a,b)\}$

(b) $\rho = \{(a,a)\}$

(c) $\rho = \{(a,a),(b,a)\}$

(d) $\rho = \{(a,b),(c,e),(e,e)\}$

ZADATAK 2.3.24. *Neka je* $X = \{a,b,c\}$. *Dopuniti relaciju* $\rho = \{(a,b),(b,c),(c,b)\}$ *do najmanje simetrične relacije.*

ZADATAK 2.3.25. *Neka je* $X = \{1,2,3\}$. *Da li je* $\rho = \{(1,1)\}$ *simetrična relacija nad skupom* X? *A antisimetrična?*

ZADATAK 2.3.26. *Neka su* $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$, $Z = \{1,2,3,4\}$. *Da li je* $\rho = \{(1,2),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ *antisimetrična relacija nad skupom* X? *A nad skupom* Y? *A nad skupom* Z?

ZADATAK 2.3.27.

(a) *Da li je* $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(1,3)\}$ *tranzitivna relacija nad skupom* $X = \{1,2,3\}$?

(b) *Da li je relacija* ρ, *gdje je* $x\rho y$ *akko* $2 \mid xy$, *tranzitivna relacija nad skupom prirodnih brojeva?*

(c) *Ako je* $X = \{a,b,c\}$, *dopuniti relaciju* $\rho = \{(a,b),(b,c),(c,b)\}$ *do najmanje tranzitivne relacije.*

ZADATAK 2.3.28. *Relaciju* $R \subseteq A \times A$, $A = \{7,a,t\}$, $R = \{(7,a),(a,t),(t,t)\}$ *dopuniti do najmanje*

(a) *relacije ekvivalencije*

(b) *relacije poretka*

ZADATAK 2.3.29. *Neka je* S *skup svih pravih u ravni, i neka je* $\rho \subseteq S \times S$ *relacija data sa*

$$p\rho q \text{ akko } p \| q.$$

Dokazati da je ρ *relacija ekvivalencije, te naći klasu ekvivalencije za pravu* $y = 8$.

ZADATAK 2.3.30. *Neka je* $S = \{a, b, c\}$ *i neka su* $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \subseteq S \times S$ *relacije ekvivalencije takve da*

$$S/_{\rho_1} = \{\{a, b\}, \{c\}\},$$

$$S/_{\rho_2} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\},$$

$$S/_{\rho_3} = \{\{a, b, c\}\}.$$

Odrediti ρ_1, ρ_2, ρ_3.

ZADATAK 2.3.31. *Da li je "=" relacija poretka nad skupom* $\mathbb{R}$*? Obrazložiti odgovor.*

ZADATAK 2.3.32. *Na skupu* $X = [1, +\infty)$ *data je relacija* ρ *na sljedeći način*

$$x \rho y \text{ akko } x(y^2 + 1) \leq y(x^2 + 1).$$

(a) *Dokazati da je* ρ *relacija poretka.*

(b) *Dokazati da je* 1 *najveći element skupa* (X, ρ).

(c) *Odrediti minimalan, maksimalan, najmanji i najveći element skupa* (M, ρ)*, gdje je* $M = \{-2, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\}$.

ZADATAK 2.3.33. *Dokazati da je* $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *definirana sa*

$$x \rho y \text{ akko } xy \leq y^2$$

relacija poretka. Odrediti (ako postoje) najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element.

ZADATAK 2.3.34. *Neka su $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ relacije ekvivalencije. Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $R_1 \cup R_2$ *je relacija ekvivalencije akko* $R_1 \cup R_2 = R_2 \circ R_1$

(b) $R_1 \circ R_1 = A^2$ *akko* $R_1 = A^2$

(c) $R_1 \circ R_2 = A^2$ *akko* $R_2 \circ R_1 = A^2$.

ZADATAK 2.3.35. *Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) Najmanja refleksivna relacija koja sadrži R je $R \cup \Delta$.

(b) Najmanja simetrična relacija koja sadrži R je $R \cup R^{-1}$.

(c) Najmanja tranzitivna relacija koja sadrži R je $\cup_{n=1}^{\infty} R^n$.

ZADATAK 2.3.36. *Neka je $(X, \preceq)$ uređen skup i neka je $\preceq^{-1}$ inverzna relacija relacije $\preceq$. Dokazati da je $(X, \preceq^{-1})$ uređen skup.*

ZADATAK 2.3.37. *Neka je X skup, i $\sim$ relacija ekvivalencije na X. Pokazati da je kolekcija svih klasa ekvivalencije na X skup.*

2.3.2 Funkcije

Prije pristupanja izradi zadataka iz ove sekcije, studenti/ce se trebaju upoznati sa definicijom funkcije, domenom i kodomenom funkcije, kompozicije funkcija i inverzne funkcije, te definicijama nekih najvažnijih osobina funkcija (injektivnost, surjektivnost i bijektivnost).

Jedna od najčešćih definicija funkcije sa kojom se možemo susresti data je na sljedeći način. Neka su dati skupovi X i Y. Funkcija $f : X \to Y$ je pravilo po kojem se *svakom* elementu $x \in X$ pridružuje *tačno jedan* element $y \in Y$. Međutim, mnogo je korektnija definicija funkcije koja je data u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13), gdje funkciju $f : X \to Y$ definiramo kao skup koji zadovoljava određene osobine. Naime, iako ova definicija možda ne djeluje tako prirodno, ona je veoma precizna i njome izbjegavamo korištenje sasvim nejasnih pojmova poput "pravilo", "pridružuje".

Dakle, u ovom kursu funkciju $f : X \to Y$ definiramo kao podskup skupa $X \times Y$ (tj. relaciju) za koji vrijede sljedeće dvije osobine:

(1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)((x, y) \in f)$

(2) $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Posmatramo li gore navedenu "naivnu" definiciju, osobina (1) govori upravo da se pravilom f svakom elementu $x \in X$ pridružuje neki element $y \in Y$, a osobina (2) govori da elementu $x \in X$ možemo pridružiti najviše jedan element $y \in Y$.

ZADATAK 2.3.38. *Neka su* $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. *Koji od sljedećih skupova su funkcije* $X \to Y$?

(a) $A = \{(1, 5), (2, 3), (4, 6)\}$

(b) $B = \{(1, 5), (2, 3), (3, 6), (4, 6), (2, 4)\}$

(c) $C = \{(1, 5), (2, 3), (3, 6), (4, 6)\}$

Rješenje:

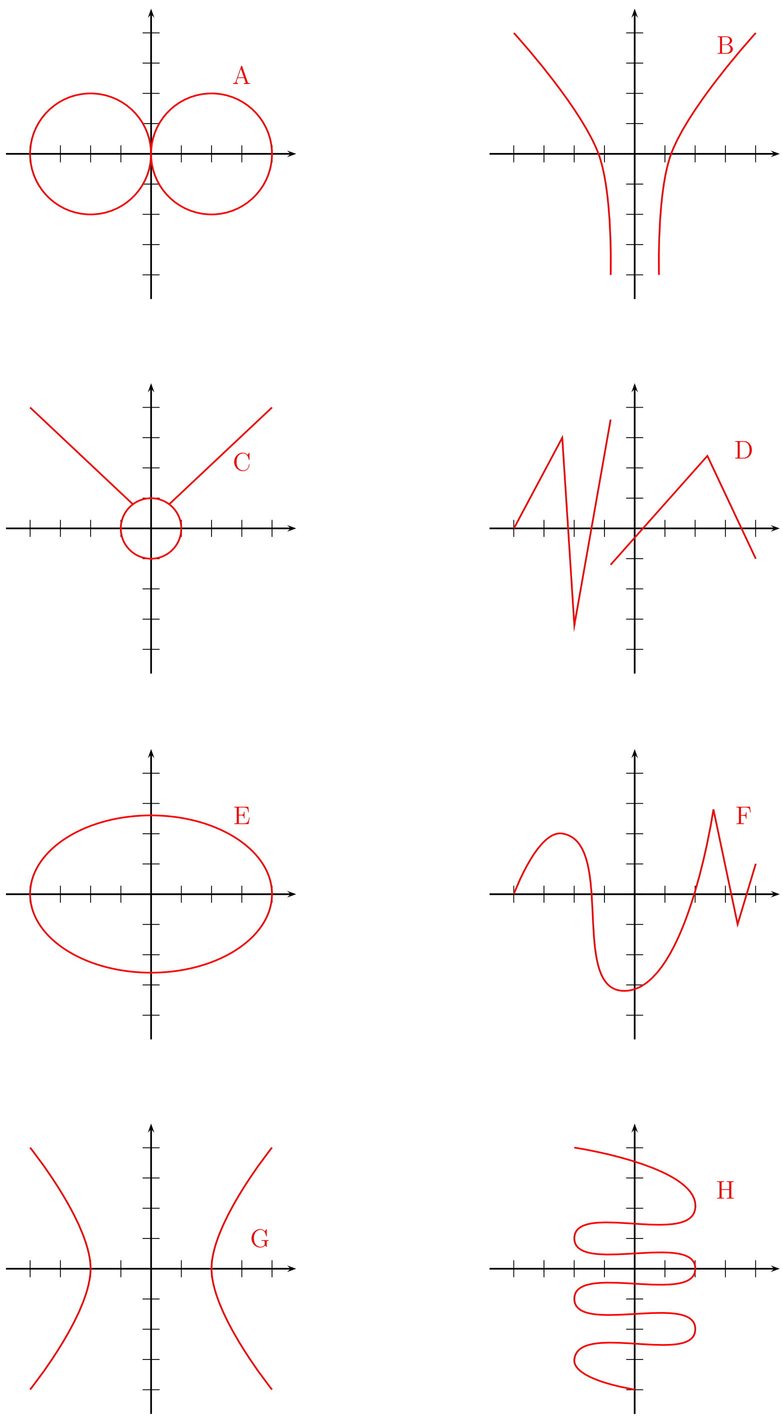
(a) Skup A nije funkcija, jer $3 \in X$, a ne postoji $y \in Y$ takav da $(3, y) \in A$, tj. nije zadovoljena osobina (1) iz definicije funkcije.

(b) Skup B nije funkcija, jer $(2, 3) \in B$ i $(2, 4) \in B$, ali $3 \neq 4$, tj. nije zadovoljena osobina (2) iz definicije funkcije.

(c) Skup C je funkcija, jer su zadovoljene obje osobine iz definicije funkcije.

Cilj ovog zadatka jeste podsjetiti studente/ice da je funkcija definisana kao skup koji mora zadovoljavati dvije osobine (od kojih jednu ne zadovoljava skup A, a drugu ne zadovoljava skup B). ▲

ZADATAK 2.3.39. *Koji od skupova tačaka na datim slikama predstavljaju funkciju* $f : [-4, 4] \to [-4, 4]$?



Rješenje: Skup A nije funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer svaka tačka $x \in [-4,0) \cup (0,4]$ ima dvije slike, tj. nije zadovoljena osobina (2) iz definicije funkcije.
Skup B nije funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer niti jedna od tačaka $x \in (-1,1)$ nema svoju sliku u $[-4,4]$, tj. nije zadovoljena osobina (1) iz definicije funkcije.
Skup C nije funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer svaka tačka $x \in (-1,1)$ ima barem dvije slike, tj. nije zadovoljena osobina (2) iz definicije funkcije.
Skup D je funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer su zadovoljene obje osobine iz definicije funkcije.
Skup E nije funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer svaka tačka $x \in (-4,4)$ ima dvije slike, tj. nije zadovoljena osobina (2) iz definicije funkcije.
Skup F je funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer su zadovoljene obje osobine iz definicije funkcije.
Skup G nije funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer niti jedna od tačaka $x \in (-2,2)$ nema svoju sliku u $[-4,4]$, tj. nije zadovoljena osobina (1) iz definicije funkcije.
Skup H nije funkcija $[-4,4] \to [-4,4]$ jer niti jedna od tačaka $[-4,-2) \cup (2,4]$ nema svoju sliku u $[-4,4]$, a također svaka tačka $x \in [-2,2]$ ima barem dvije slike, tj. nisu zadovoljene niti osobina (1), niti osobina (2) iz definicije funkcije.
▲

Kao što je ranije spomenuto, nakon usvajanja pojma funkcije, potrebno je upoznati se i sa definicijama domena i kodomena funkcije, kompozicije funkcija i inverzne funkcije. Međutim, to nije potrebno ukoliko su poznati pojmovi domena i kodomena relacija, kompozicije relacija i inverzne relacije, jer je svaka funkcija relacija, pa se možemo koristiti već poznatim definicijama.

ZADATAK 2.3.40. *Neka je A proizvoljan skup. Da li postoje refleksivne relacije $R \subseteq A \times A$ koje su funkcije?*

Rješenje: Da, ali jedino $\mathrm{id}_{D_1(R)} : D_1(R) \to D_1(R)$, $\mathrm{id}_{D_1(R)}(x) = x$. ▲

ZADATAK 2.3.41. *Neka je $A \neq \emptyset$ i neka je $R \subseteq A \times A$ tranzitivna relacija koja ne sadrži niti jedan od dijagonalnih elemenata $(x, x) \in A \times A$. Dokazati da R nije funkcija.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, neka je skup R funkcija. Na osnovu osobine (1) iz definicije funkcije, imamo da je $D_1(R) = A$. Kako je dalje $A \neq \emptyset$, postoje $x, y, z \in A$ takvi da je $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$. Na osnovu tranzitivnosti relacije R, vrijedi da i $(x, z) \in R$. Primjetimo da $y \neq z$ jer u suprotnom $(y, z) = (y, y) \in R$, što je nemoguće jer po pretpostavci R ne sadrži niti jedan od dijagonalnih elemenata. Dakle, imamo da $(x, y) \in R$ i $(x, z) \in R$, pri čemu $y \neq z$, što je kontradikcija sa činjenicom da je R funkcija, tj. sa osobinom (2) iz definicije funkcije. ▲

ZADATAK 2.3.42. *Neka su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^2 - 2$. Naći funkcije $g \circ f$ i $f \circ g$.*

Rješenje: Na osnovu definicije kompozicije funkcija, imamo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3.$$

▲

U sljedeća dva zadatka naveden je niz tvrdnji koje se jednostavno pokazuju, ali koje se često koriste u matematici. Kao što ćemo pokazati, svaka funkcija "prolazi" kroz uniju, dok to nije slučaj za presjek ili razliku skupova. S druge strane, f^{-1} zadovoljava mnogo "ljepše" osobine: "prolazi" kroz uniju, presjek i razliku skupova.

ZADATAK 2.3.43. *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, i neka su $A, B \subseteq X$. Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(d) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

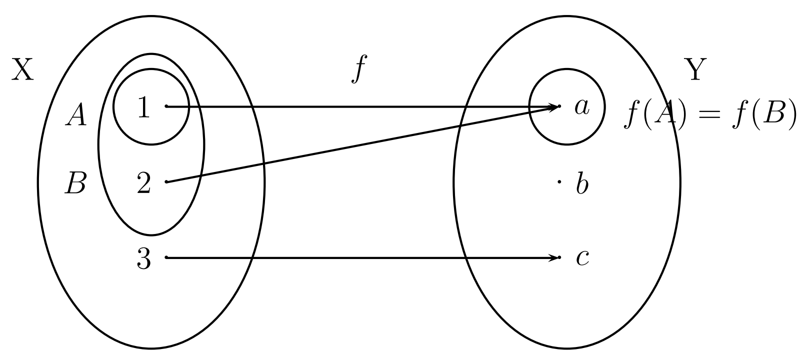
Objasniti zašto je to najviše sto vrijedi.

Rješenje: Neka je $f : X \to Y$ funkcija, i neka su $A, B \subseteq X$.

(a) Neka je $A \subseteq B$. Na osnovu definicije skupa $f(M)$ i date pretpostavke, vrijedi

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \\ &\Rightarrow (\exists x \in B)(y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(B), \end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi $f(A) \subseteq f(B)$. Primjetimo da, iako $A \subset B$, najviše imamo $f(A) \subseteq f(B)$, tj. ne možemo zaključiti da je $f(A) \subset f(B)$. Zaista, ako je naprimjer $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ i funkcija $f : X \to Y$ zadana na sljedeći način



,

imamo da je $A = \{1\} \subset \{1, 2\} = B$, ali $f(A) = \{a\} = f(B)$.

(b) Želimo pokazati da je $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Na osnovu definicije skupa $f(M)$, definicije presjeka skupova, jednostavne tautologije $p \Leftrightarrow$

$p \wedge p$, komutativnosti konjukcije, i činjenice

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad [(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))],$$

imamo

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow (\exists x \in A \cap B)(y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge y = f(x) \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x) \wedge x \in B \wedge y = f(x)) \\
&\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x)) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \wedge (\exists x \in B)(y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B),
\end{aligned}$$

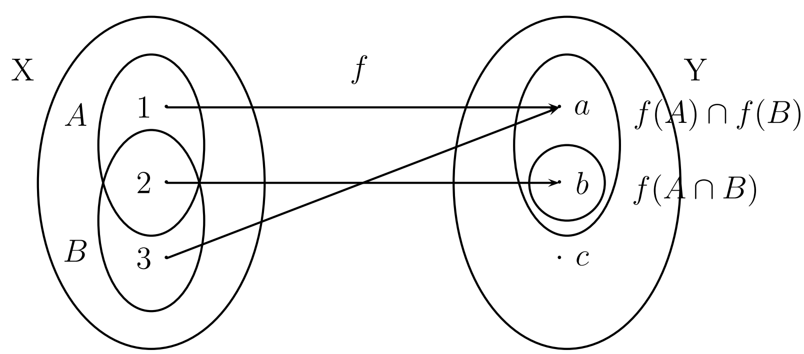
pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Primjetimo da ne vrijedi $f(A \cap B) = f(A \cap B)$ jer egzistencijalni kvantifikator ne prolazi kroz konjukciju, tj. vrijedi samo gore navedena činjenica

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad [(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))],$$

ali ne i obrnuta implikacija. Zaista, mogu postojati x_1 takav da $P(x_1)$ i x_2 takav da $P(x_2)$, pri čemu $x_1 \neq x_2$, pa ne mora postojati x takav da su istovremeno zadovoljeni $P(x)$ i $Q(x)$. Konkretno, ako je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ i funkcija $f : X \to Y$ zadana na sljedeći način



,

imamo da je

$$f(A \cap B) = f(\{2\}) = \{b\} \subsetneq \{a, b\} = f(A) \cap f(B).$$

(c) Želimo pokazati da je $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Na osnovu definicije skupa $f(M)$, definicije unije skupova, distributivnosti konjukcije prema disjunkciji, i činjenice

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad [(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))],$$

imamo

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow (\exists x \in A \cup B)(y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cup B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)[(x \in A \vee x \in B) \wedge y = f(x)] \\
&\Leftrightarrow (\exists x)[(x \in A \wedge y = f(x)) \vee (x \in B \wedge y = f(x))] \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x)) \vee (\exists x)(x \in B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \vee (\exists x \in B)(y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B),
\end{aligned}$$

pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) zaista vrijedi

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

(d) Želimo pokazati da je $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Na osnovu definicije razlike skupova, definicije "$\notin$", definicije skupa $f(M)$ i činjenice

$$\neg(\exists x)P(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(\neg P(x)),$$

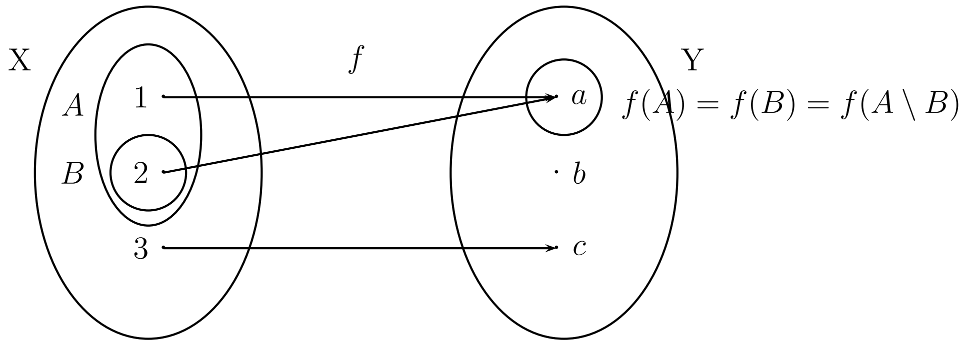
imamo

$$\begin{aligned}
y \in f(A) \setminus f(B) &\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge \neg(y \in f(B)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \wedge \neg[(\exists x \in B)(y = f(x))] \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \wedge (\forall z \in B)(y \neq f(z)) \\
&\Rightarrow (\exists x \in A, x \notin B)(y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A \setminus B)(y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A \setminus B),
\end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B).$$

Primjetimo da ne vrijedi $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$, jer činjenica da postoji $x \in A$, $x \notin B$ takav da $y = f(x)$ ne implicira da za sve $z \in B$ vrijedi $y \neq f(z)$. Konkretno, ako je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$ i funkcija $f : X \to Y$ zadana na sljedeći način



imamo da je

$$f(A)\backslash f(B) = f(\{1,2\})\backslash f(\{2\}) = \{a\}\backslash\{a\} = \emptyset \subsetneq \{a\} = f(\{1\}) = f(A\backslash B).$$

▲

ZADATAK 2.3.44. *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, i neka su $A, B \subseteq Y$. Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(d) $f^{-1}(A) \setminus f(B) = f^{-1}(A \setminus B)$

Rješenje: Neka je $f : X \to Y$ funkcija, i neka su $A, B \subseteq Y$.

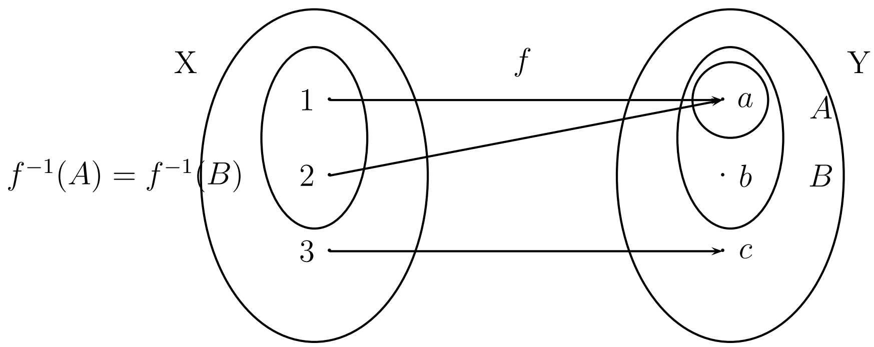
(a) Neka je $A \subseteq B$. Na osnovu definicije skupa $f^{-1}(M)$ i date pretpostavke, vrijedi

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A) &\Leftrightarrow f(x) \in A \\ &\Rightarrow f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B), \end{aligned}$$

pa na osnovu definicije podskupa zaista vrijedi

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B).$$

Primjetimo da i ovdje, iako $A \subset B$, najviše imamo $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, tj. ne možemo zaključiti da je $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Zaista, ako je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ i funkcija $f : X \to Y$ zadana na sljedeći način



imamo da je $A = \{a\} \subset \{a, b\} = B$, ali $f^{-1}(A) = \{1, 2\} = f^{-1}(B)$.

(b) Na osnovu definicije skupa $f^{-1}(M)$ i definicije presjeka skupova, imamo

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \end{aligned}$$

pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) zaista vrijedi

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

(c) Na osnovu definicije skupa $f^{-1}(M)$ i definicije unije skupova, imamo

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \end{aligned}$$

pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) zaista vrijedi

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

(d) Na osnovu definicije razlike skupova, definicije "$\notin$" i definicije skupa

$f^{-1}(M)$, imamo

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge \neg(x \in f^{-1}(B))\\
&\Leftrightarrow f(x) \in A \wedge \neg(f(x) \in B)\\
&\Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B\\
&\Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B\\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \setminus B)
\end{aligned}$$

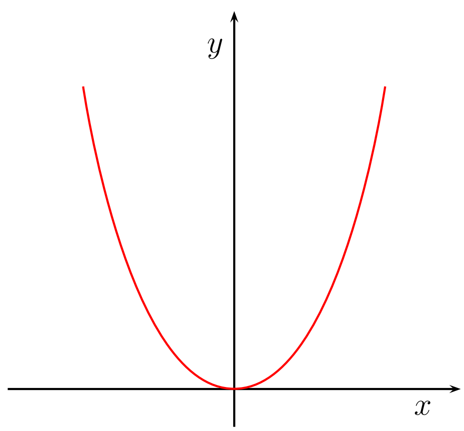
pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) zaista vrijedi

$$f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(A \setminus B).$$

▲

ZADATAK 2.3.45. *Naći najveći interval A za koji je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ injektivna.*

Rješenje: Kako je grafik date funkcije parabola prikazana na slici



jasno je da je najveći interval na kojem je funkcija f injektivna $A = (-\infty, 0]$ ili $A = [0, +\infty)$. ▲

ZADATAK 2.3.46. *Da li konstantna funkcija može biti injektivna? A surjektivna?*

Rješenje: Neka je $f : D_1(f) \to D_2(f)$ konstantna funkcija, pri čemu je $f(x) = c$ za sve $x \in D_1(f)$. Funkcija f je injektivna samo ako je $D_1(f) = \emptyset$ ili $D_1(f) = \{a\}$, tj. $D_1(f)$ je proizvoljan jednočlan skup, pri čemu je $D_2(f)$ proizvoljan skup koji sadrži $\{c\}$. Funkcija f je surjektivna samo ako je $D_2(f)$ jednočlan skup ($D_2(f) = \{c\}cc$), pri čemu je $D_1(f)$ proizvoljan neprazan skup. ▲

ZADATAK 2.3.47. *Za koje skupove A je funkcija $\mathrm{id} : A \to A$ injektivna? A surjektivna?*

Rješenje: Funkcija $\mathrm{id} : A \to A$ je injektivna i surjektivna za proizvoljan skup A. ▲

ZADATAK 2.3.48. *Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) $f : A \to B$ *je injektivna akko* $(\exists g : B \to A)(g \circ f = \mathrm{id}_A)$

(b) $f : A \to B$ *je surjektivna akko* $(\exists g : B \to A)(f \circ g = \mathrm{id}_B)$

Rješenje:

(a) $\Rightarrow$) Neka je $f : A \to B$ injektivna funkcija. Tada je funkcija $\overline{f} : A \to f(A)$ definirana sa $\overline{f}(x) = x$ bijektivna funkcija, pa postoji njoj inverzna funkcija $\overline{f}^{-1} : f(A) \to A$. Definirajmo funkciju $g : B \to A$ na sljedeći način

$$g(y) = \begin{cases} \overline{f}^{-1}(y), & y \in f(A) \\ \text{bilo koji } x \in A, & y \in B \setminus f(A) \end{cases}$$

Tvrdimo da za ovako definiranu funkciju g vrijedi $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Zaista, neka je $x \in A$ proizvoljan. Na osnovu definicije kompozicije funkcija, definicije funkcije g i činjenice da $f(x) \in f(A)$, te definicije funkcije $\overline{f}$, imamo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \overline{f}^{-1}(f(x)) = \overline{f}^{-1}(\overline{f}(x)) = x = \mathrm{id}_A(x),$$

pa na osnovu definicije jednakosti funkcija vrijedi $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

$\Leftarrow$) Neka je $f : A \to B$ funkcija takva da postoji funkcija $g : B \to A$ sa osobinom $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Želimo pokazati da je f injektivna funkcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2).$$

U tu svrhu posmatrajmo $x_1, x_2 \in A$ takve da je $f(x_1) = f(x_2)$. Tvrdimo da je $x_1 = x_2$. Primjetimo da

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{id}_A(x_1) = \mathrm{id}_A(x_2) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, \end{aligned}$$

pa je funkcija f zaista injektivna.

(b) $\Rightarrow$) Neka je $f : A \to B$ surjektivna, tj. neka

$$\begin{aligned} & (\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)) \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall y \in B)(\exists x \in A)(x = f^{-1}(y)) \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall y \in B)(\exists x \in A)(x \in f^{-1}(\{y\})) \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall y \in B)(f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Stoga u svakom $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ izaberimo tačno jedan x, što je moguće na osnovu AC (Aksiom izbora), i definirajmo za $g(y)$ upravo taj x. Želimo pokazati da za ovako definiranu funkciju g vrijedi $f \circ g = \mathrm{id}_B$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $y \in B$. Na osnovu definicije kompozicije funkcija, definicije funkcije g i činjenice da $x \in f^{-1}(\{y\})$, imamo

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y,$$

pa na osnovu definicije jednakosti funkcija vrijedi $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

$\Leftarrow$) Neka je $f : A \to B$ funkcija takva da postoji funkcija $g : B \to A$ sa osobinom $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Želimo pokazati da je f surjektivna funkcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $y \in B$. Na osnovu date pretpostavke i definicije kompozicije funkcija, imamo

$$y = \mathrm{id}_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)).$$

Dakle,

$$(\forall y \in B)(\exists x = g(y) \in A)(y = f(x)),$$

pa je f zaista surjektivna.

▲

U prethodnom zadatku dokazana je vrlo korisna karakterizacija injektivnosti i surjektivnosti funkcije, koja se u literaturi često uzima za definiciju ovih pojmova. Dakle, funkcija je injektivna akko ima lijevi inverz, a funkcija je surjektivna akko ima desni inverz. Pored važnosti navedenih tvrdnji u prethodnom zadatku, u njihovim dokazima izneseno je nekoliko korisnih informacija koje prevazilaze okvire konkretnog zadatka. Naime, korisno je uočiti da nam svaka injekcija $f : A \to B$ obezbjeđuje postojanje bijekcije $\overline{f} : A \to f(A)$, što je trik za "pravljenje" bijekcija koji često možemo koristiti. Dakle, injektivnost funkcije je sam po sebi veliki zahtjev, i "samo" ograničavanjem kodomena funkcije od svake injektivne funkcije mi možemo konstruisati bijektivnu funkciju. Uočimo ovdje također da funkcija nije zadana samo svojom formulom, već i sa druga dva iznimno bitna elementa: domenom i kodomenom funkcije. Tako naprimjer, funkcije f i g mogu biti zadane potpuno istom formulom, ali posmatrane na različitim domenima i kodomenima one mogu imati potpuno različite osobine, tj. jedna od njih može biti injektivna i/ili surjektivna, dok to za drugu ne mora biti slučaj, što smo mogli/e uvidjeti na primjerima funkcija f i $\overline{f}$ iz prethodnog zadatka.

ZADATAK 2.3.49. *Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) *Ako je $f : A \to B$ injektivna, onda može postojati najviše jedna funkcija $g : B \to A$ takva da je $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

(b) *Ako je $f : A \to B$ surjektivna, onda može postojati najviše jedna funkcija $g : B \to A$ takva da je $g \circ f = \mathrm{id}_A$.*

Rješenje:

(a) Neka je $f : A \to B$ injektivna funkcija. Želimo pokazati da može postojati najviše jedna funkcija $g : B \to A$ takva da je $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Pretpostavimo suprotno, neka postoje $g_1, g_2 : B \to A$ takve da $f \circ g_1 = \mathrm{id}_B$ i $f \circ g_2 = \mathrm{id}_B$, pri čemu je $g_1 \neq g_2$. Na osnovu definicije jednakosti funkcija, injektivnosti funkcije f, definicije kompozicije funkcija i datih prepostavki o funkcijama g_1 i g_2, dobijamo

$$\begin{aligned} g_1 \neq g_2 &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(g_1(z) \neq g_2(z)) \\ &\Rightarrow (\exists z \in B)(f(g_1(z)) \neq f(g_2(z))) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in B)((f \circ g_1)(z) \neq (f \circ g_2)(z)) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(\mathrm{id}_B(z) \neq \mathrm{id}_B(z)) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(z \neq z), \end{aligned}$$

što je kontradikcija.

(b) Neka je $f : A \to B$ surjektivna funkcija. Želimo pokazati da može postojati najviše jedna funkcija $g : B \to A$ takva da je $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Pretpostavimo suprotno, neka postoje $g_1, g_2 : B \to A$ takve da $g_1 \circ f = \mathrm{id}_A$ i $g_2 \circ f = \mathrm{id}_A$, pri čemu je $g_1 \neq g_2$. Na osnovu definicije jednakosti funkcija, surjektivnosti funkcije f, definicije kompozicije funkcija i datih prepostavki o funkcijama g_1 i g_2, dobijamo

$$\begin{aligned} g_1 \neq g_2 &\Leftrightarrow (\exists z \in B)(g_1(z) \neq g_2(z)) \\ &\Rightarrow (\exists x \in A)(g_1(f(x)) \neq g_2(f(x))) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)((g_1 \circ f)(x) \neq (g_2 \circ f)(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\mathrm{id}_A(x) \neq \mathrm{id}_A(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \neq x), \end{aligned}$$

što je kontradikcija.

▲

ZADATAK 2.3.50. *Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funkcije. Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) Ako su f i g injekcije, onda je i $g \circ f$ injekcija.

(b) Ako su f i g surjekcije, onda je i $g \circ f$ surjekcija.

(c) Ako su f i g bijekcije, onda je i $g \circ f$ bijekcija.

Rješenje: Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funkcije.

(a) Neka su f i g injektivne funkcije. Želimo pokazati da je i $g \circ f : A \to C$ injektivna funkcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)((g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2).$$

U tu svrhu posmatrajmo $x_1, x_2 \in A$ takve da je $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Tvrdimo da vrijedi $x_1 = x_2$. Na osnovu definicije kompozicije relacija, te redom injektivnosti funkcija g i f, imamo

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow \quad x_1 = x_2,\end{aligned}$$

pa je $g \circ f$ zaista injekcija.

(b) Neka su f i g surjektivne funkcije. Želimo pokazati da je i $g \circ f : A \to C$ surjektivna funkcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall z \in C)(\exists x \in A)(z = (g \circ f)(x)).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $z \in C$. Na osnovu surjektivnosti redom funkcija g i f, i definicije kompozicije funkcija, imamo

$$\begin{aligned}z \in C \quad &\Rightarrow \quad (\exists y \in B)(z = g(y)) \\ &\Rightarrow \quad (\exists x \in A)(z = g(f(x))) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in A)(z = (g \circ f)(x))\end{aligned}$$

pa je $g \circ f$ zaista surjekcija.

(c) Tvrdnja (c) posljedica je tvrdnji (a) i (b), koje su upravo dokazane. Zaista, ako su f i g bijektivne funkcije, onda su one i injektivne i surjektivne, pa je, na osnovu (a) i (b), i funkcija $g \circ f$ i injektivna i surjektivna, tj. bijektivna je.

▲

ZADATAK 2.3.51. *Neka je $f : A \to B$ funkcija i neka je $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ funkcija data sa*

$$g(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \quad (Y \subseteq B).$$

Dokazati sljedeće tvrdnje.

(a) f je injekcija akko je g surjekcija.

(b) f je surjekcija akko je g injekcija.

Rješenje:

(a) $\Rightarrow$) Neka je $f : A \to B$ injekcija. Želimo pokazati da je $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ surjekcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A))(\exists Y \in \mathcal{P}(B))(X = g(Y)).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $X \in \mathcal{P}(A)$, tj. $X \subseteq A$. Posmatrajmo skup

$$Y = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

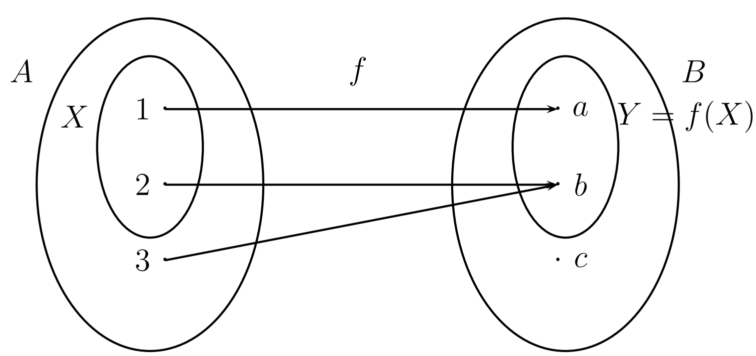
Očito vrijedi $Y \subseteq B$, tj. $Y \in \mathcal{P}(B)$. Na osnovu definicije funkcije g, skupa Y i injektivnosti funkcije f, imamo

$$\begin{aligned} g(Y) &= \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \\ &= \{a \in A \mid f(a) \in f(X)\} \\ &= \{a \in A \mid (\exists x \in X)(f(a) = f(x))\} \\ &= \{a \in A \mid (\exists x \in X)(a = x)\} \\ &= \{a \in A \mid a \in X\} \\ &= X. \end{aligned}$$

Dakle,

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A))(\exists Y = f(X) \in \mathcal{P}(B))(X = g(Y)),$$

pa je g surjekcija. Primjetimo da je injektivnost funkcije f bila neophodna pretpostavka, jer inače ne bismo mogli/e zaključiti da $f(a) = f(x)$ implicira $a = x$. Naprimjer, ako je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $X = \{1, 2\}$, i funkcija $f : A \to B$ zadana na sljedeći način



,

onda je $Y = f(X) = \{a, b\}$, ali $g(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} = A \neq X$.

$\Leftarrow$) Neka je $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ surjekcija. Želimo pokazati da je $f : A \to B$ injekcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)).$$

U tu svrhu posmatrajmo $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 \neq x_2$. Tvrdimo da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Na osnovu surjektivnosti i definicije funkcije g, imamo

$$\begin{aligned} x_1 \in A &\Leftrightarrow \{x_1\} \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \{x_1\} \in \mathcal{P}(A) \\ &\Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{P}(B))(\{x_1\} = g(Y)) \\ &\Leftrightarrow (\exists Y \in \mathcal{P}(B))(\{x_1\} = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}). \end{aligned}$$

Na osnovu posljednjeg izraza zaključujemo da $f(x_1) \in Y$, a kako $x_2 \neq x_1$, onda $x_2 \notin \{x_1\} = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$, pa $f(x_2) \notin Y$. Dakle, sigurno vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$, pa je f injekcija.

(b) $\Rightarrow$) Neka je $f : A \to B$ surjekcija. Želimo pokazati da je $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ injekcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(B))(Y_1 \neq Y_2 \quad \Rightarrow \quad g(Y_1) \neq g(Y_2)).$$

U tu svrhu posmatrajmo $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(B)$, tj. $Y_1, Y_2 \subseteq B$ takve da $Y_1 \neq Y_2$. Na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti), to znači da postoji neki $y \in B$ koji se nalazi u jednom od skupova Y_1, Y_2, ali ne u drugom. Bez umanjenja općenitosti (stoga $*$ u prvoj implikaciji dolje) pretpostavimo da postoji $y \in B$ takav da je $y \in Y_1$ i $y \notin Y_2$. Dalje, na osnovu surjektivnosti funkcije f i definicije funkcije g, imamo

$$\begin{aligned} Y_1 \neq Y_2 &\overset{*}{\Rightarrow} (\exists y \in Y)(y \in Y_1 \wedge y \notin Y_2) \\ &\Rightarrow (\exists y \in Y)[(\exists x \in A)(y = f(x) \in Y_1) \wedge (\exists x \in A)(y = f(x) \notin Y_2)] \\ &\Rightarrow (\exists y \in Y)(\exists x \in A)(y = f(x) \in Y_1 \wedge y = f(x) \notin Y_2) \\ &\Rightarrow (\exists x \in A)(x \in \{a \in A \mid f(a) \in Y_1\} \wedge x \notin \{a \in A \mid f(a) \in Y_2\}) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \in g(Y_1) \wedge x \notin g(Y_2)), \end{aligned}$$

pa na osnovu ZF1 (Aksiom ekstenzionalnosti) vrijedi $g(Y_1) \neq g(Y_2)$. Dakle, dobili smo $Y_1 \neq Y_2$ implicira da je $g(Y_1) \neq g(Y_2)$, pa je g injekcija.

$\Leftarrow$) Neka je $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ injekcija. Želimo pokazati da je $f : A \to B$ surjekcija, tj. želimo pokazati da vrijedi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $y \in B$. Na osnovu definicije praznog skupa, injektivnosti i definicije funkcije g imamo

$$\begin{aligned} y \in B &\Rightarrow \{y\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow g(\{y\}) \neq g(\emptyset) \\ &\Leftrightarrow \{a \in A \mid f(a) \in \{y\}\} \neq \{a \in A \mid f(a) \in \emptyset\} \\ &\Leftrightarrow \{a \in A \mid f(a) = y\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in A)(f(a) = y). \end{aligned}$$

Dakle,

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)),$$

pa je f surjekcija.

▲

Primjetimo ovdje veoma bitnu činjenicu o (injektivnim) funkcijama koju smo koristili u prethodna dva zadatka, ali koju svakodnevno koristimo u svim oblastima matematike. Ako je $h : R \to S$ proizvoljna (dobro definirana) funkcija, jasno je da za $r_1, r_2 \in R$ činjenica $r_1 = r_2$ uvijek implicira $h(r_1) = h(r_2)$, tj. uvijek možemo "dodati djelovanje" funkcije na svaku jednakost. Tako naprimjer, za funkcije $h(x) = x^2$ i $h(x) = x^3$ i realne brojeve $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ imamo

$$r_1 = r_2 \Rightarrow r_1^2 = r_2^2,$$

$$r_1 = r_2 \Rightarrow r_1^3 = r_2^3.$$

Međutim, jako često se pravi greška pri "uklanjanju djelovanja" neke funkcije. Naime, ako vrijedi $h(r_1) = h(r_2)$, to nipošto ne implicira da $r_1 = r_2$, tj. nije moguće zanemariti djelovanje funkcije h (kao što ga uvijek možemo dodati). To smijemo uraditi samo kada je funkcija h injektivna - zaista, definicija injektivnosti funkcije h upravo i govori da $h(r_1) = h(r_2) \Rightarrow r_1 = r_2$. Tako naprimjer, za realne brojeve $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1^2 = r_2^2 \not\Rightarrow r_1 = r_2, \text{ jer } r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_1 = \pm r_2,$$

ali

$$r_1^3 = r_2^3 \Rightarrow r_1 = r_2,$$

jer funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$ nije injektivna, ali $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$ jeste. Na ovu smo činjenicu vjerovatno bili/e upozoreni/e još u osnovnoj i srednjoj školi, iako bez pravog objašnjenja. Naprimjer, pri rješavanju jednačina koristili bismo činjenicu da

$$\log(x+3) = \log(2x^2 - 5x + 1) \quad \Rightarrow \quad x + 3 = 2x^2 - 5x + 1,$$

ali smo morali/e imati u vidu da

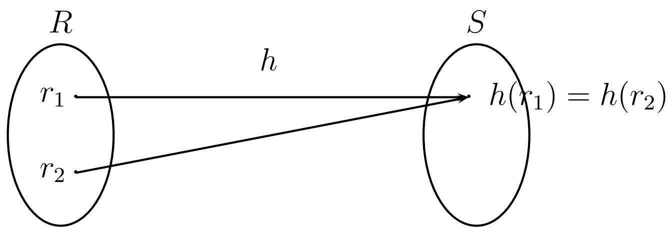
$$|x+3| = |2x^2 - 5x + 1| \quad \not\Rightarrow \quad x + 3 = 2x^2 - 5x + 1,$$

ili

$$\sin(x+3) = \sin(2x^2 - 5x + 1) \quad \not\Rightarrow \quad x + 3 = 2x^2 - 5x + 1,$$

tj. bilo je dozvoljeno "ukloniti djelovanje" logaritma, ali ne i apsolutne vrijednosti ili sinusa. Sada znamo da je razlog tomu činjenica da je logaritamska funkcija injektivna, dok apsolutna vrijednost i sinus ugla nisu injektivne funkcije.

Ekvivalentno navedenoj argumentaciji, činjenica da je $r_1 \neq r_2$ u općem slučaju nipošto ne implicira da je $h(r_1) \neq h(r_2)$, jer možemo imati sljedeću situaciju.



Zaista, $r_1 \neq r_2$ implicira $h(r_1) \neq h(r_2)$ akko je h injektivna funkcija.

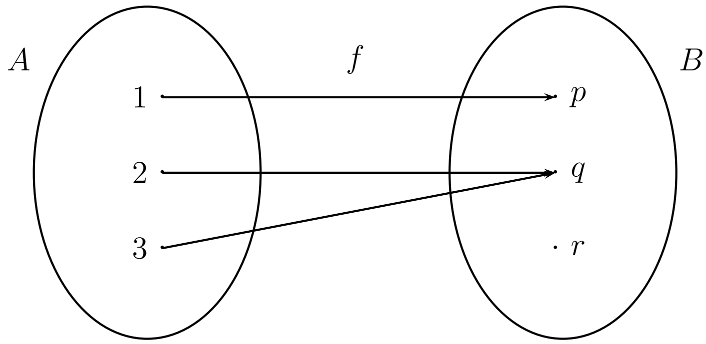
U završnom dijelu ove sekcije, preostalo je par zadataka sa inverznom funkcijom. Neka je $f : A \to B$ funkcija, i $Y \subseteq B$. Već ranije u zadacima susretali smo se sa skupom

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\},$$

koji u slučaju $Y = \{b\}$ postaje

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) \in \{b\}\} = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Dakle, $(b, a) \in f^{-1}$ akko $(a, b) \in f$, tj. f^{-1} podrazumijeva inverznu relaciju relacije f. Međutim, ne postoji razlog zašto bi za relaciju f koja je funkcija, i inverzna relacija f^{-1} bila funkcija. Zaista, u općem slučaju $f^{-1}(b)$ može biti prazan skup ili može biti skup koji se sastoji od više od jednog elementa, tj. f^{-1} ne mora biti zadovoljavati ni osobinu (1) niti osobinu (2) iz definicije funkcije. Tako naprimjer, za $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q, r\}$, i funkciju $f : A \to B$ zadanu na sljedeći način



,

vrijedi

$$\begin{aligned} f^{-1}(p) &= \{1\} \\ f^{-1}(q) &= \{2,3\} \\ f^{-1}(r) &= \emptyset, \end{aligned}$$

pa relacija f^{-1} nije funkcija. Zaista, šta bismo pravilom $f^{-1} : B \to A$ pridružili elementima $q, r \in B$?

Međutim, primjetimo da, ukoliko je $f : A \to B$ surjekcija, za svaki $b \in B$ vrijediti će $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, tj. relacija f^{-1} zadovoljavati će osobinu (1) definicije funkcije. Ukoliko je $f : A \to B$ i injekcija, onda će za svaki $b \in B$ skup $f^{-1}(b)$ biti jednočlan, tj. relacija f^{-1} će zadovoljavati i osobinu (2) iz definicije funkcije. Dakle, za svaku bijektivnu (i to samo takvu) funkciju $f : A \to B$ je i inverzna relacija $f^{-1} : B \to A$ funkcija, tj. bijektivnost funkcije $f : A \to B$ nam obezbjeđuje da definiramo pravilo (koje nazivamo inverznom funkcijom)

$$f^{-1} : B \to A : b \to f^{-1}(b)$$

koje svakom elementu $b \in B$ pridružuje tačno jedan $f^{-1}(b) \in A$.

Zaista, u nekim od ranijih zadataka smo pokazali/e da je funkcija injektivna akko ima desni inverz, surjektivna akko ima lijevi inverz, pa je funkcija bijektivna akko ima (lijevi i desni) inverz.

ZADATAK 2.3.52. *Neka je* $A = [-1, 1]$. *Koja od sljedećih funkcija* $A \to A$ *ima inverznu funkciju?*

(a) $f_1(x) = x^2$

(b) $f_2(x) = x^5$

(c) $f_3(x) = \sin x$

(d) $f_4(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$

Rješenje:

(a) Funkcija $f_1 : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \to x^2$ nije ni injektivna ni surjektivna, pa nema inverznu funkciju.

(b) Funkcija $f_2 : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \to x^5$ je bijektivna, pa ima inverznu funkciju, i to

$$f_2^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \to \sqrt[5]{x}.$$

(c) Funkcija $f_3 : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \to \sin x$ je injektivna, ali nije surjektivna, pa nema inverznu funkciju.

(d) Funkcija $f_4 : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \to \sin \frac{\pi x}{2}$ je bijektivna, pa ima inverznu funkciju, i to

$$f_4^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 1] : x \to \frac{2}{\pi} \arcsin x.$$

▲

ZADATAK 2.3.53. *Neka je* $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Naći inverznu funkciju funkcije* $f : A \to B$ *definirane sa*

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}.$$

Rješenje: Lako se provjerava da je $f : A \to B$ dobro definirana bijektivna funkcija (što je ostavljeno studentima/cama za vježbu), pa postoji inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$. Za svaki $x \in A$ je $x \neq 3$, i za svaki $y \in B$ je $y \neq 1$, pa imamo

$$\begin{aligned} y = f(x) = \tfrac{x-2}{x-3} \quad &\Leftrightarrow \quad y(x-3) = x-2 \\ &\Leftrightarrow \quad yx - 3y = x - 2 \\ &\Leftrightarrow \quad yx - x = 3y - 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (y-1)x = 3y-2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3y-2}{y-1}, \end{aligned}$$

pa je

$$f^{-1} : B \to A : x \to \frac{3x-2}{x-1}$$

inverzna funkcija funkcije f. ▲

Zadaci za samostalan rad

ZADATAK 2.3.54. *Skicirati grafike sljedećih funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = 4x - x^2$

(b) $f(x) = x + 2|x|$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < -2 \\ x, & |x| \leq 2 \\ 3-x, & x > 2. \end{cases}$

ZADATAK 2.3.55. *Neka su date funkcije* $f : A \to B$ *i* $g : B \to A$ *takve da* $g \circ f = 1_A$. *Koje tvrdnje su tačne?*

(a) $g = f^{-1}$

(b) *f je surjekcija*

(c) *f je bijekcija*

(d) *g je surjekcija*

(e) *g je bijekcija*

ZADATAK 2.3.56. *Neka je* $f : A \to B$ *surjektivna funkcija. Tada je inducirana funkcija* $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ *također surjektivna.*

ZADATAK 2.3.57. *Neka je* $f : A \to B$ *surjektivna funkcija. Tada je inducirana funkcija* $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ *također surjektivna.*

ZADATAK 2.3.58. *Neka su* A *i* B *skupovi. Dokazati da je kolekcija svih funkcija* $f : A \to B$ *skup.*

ZADATAK 2.3.59. *Za proizvoljnu funkciju* $h : A \to B$ *skup*

$$\operatorname{Ker} h = \{(x, y) \mid h(x) = h(y)\}$$

nazivamo jezgra funkcije h*. Dokazati da je jezgra svake funkcije relacija ekvivalencije. Dokazati da je svaka relacija ekvivalencije jezgra neke funkcije.*

ZADATAK 2.3.60. *Neka je* $f : X \to Y$ *proizvoljna funkcija. Dokazati da postoji relacija ekvivalencije* R *na skupu* X*, te da postoje surjekcija* $\Phi : X \to X/_R$ *i injekcija* $\Theta : X/_R \to Y$ *tako da vrijedi* $\Theta \circ \Phi = f$*.*

2.4 Aksiom izbora

Prisjetimo se da je prozivod skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq U$ definiran kao skup svih uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pri čemu je $a_i \in A_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Međutim, kako definirati proizvod proizvoljno mnogo skupova, naprimjer neprebrojivo mnogo skupova (više o prebrojivim i neprebrojivim skupovima u sljedećem poglavlju)? To možemo učiniti na sljedeći način. Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$

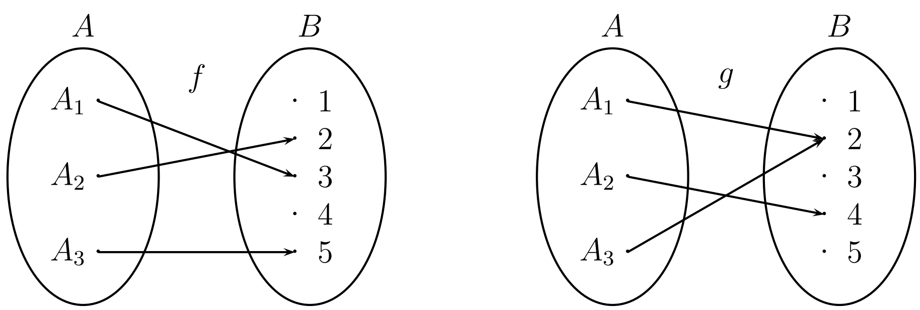
neprazna familija nepraznih skupova, $A_i \subseteq U$. Produkt skupova $\{A_i\}_{i \in I}$, u oznaci $\prod_{i \in I} A_i$, definiramo kao skup svih funkcija izbora definiranih na $\{A_i\}_{i \in I}$, tj.

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : \{A_i\}_{i \in I} \to U \mid f \text{ funkcija izbora } \}.$$

Funkcija $f : \{A_i\}_{i \in I} \to U$ je funkcija izbora akko $f(A_i) \in A_i$ za svaki $i \in I$, tj. ako f "bira" po jedan element a_i iz svakog skupa A_i. Dakle, drugim riječima

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : \{A_i\}_{i \in I} \to U \mid (\forall i \in I)(f(A_i) \in A_i)\}.$$

ZADATAK 2.4.1. *Neka su* $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 3, 4\}$, $A_3 = \{2, 5\}$ *i neka su* $f, g : \{A_i\}_{i=1}^{3} \to \cup_{i=1}^{3} A_i$ *funkcije definirane sa*



Da li su f *i* g *funkcije izbora?*

Rješenje: Funkcija f nije funkcija izbora jer $f(A_2) = 2 \notin A_2$. Funkcija g jeste funkcija izbora jer zadovoljava sve uslove iz definicije funkcije izbora, tj. $g(A_1) = 2 \in A_1$, $g(A_2) = 4 \in A_2$ i $g(A_3) = 2 \in A_3$. ▲

Aksiom izbora (AC) nam govori da je produkt neprazne familije nepraznih skupova uvijek neprazan, odnosno, uzmemo li u obzir prethodnu definiciju, aksiom izbora nam ustvari tvrdi da postoji funkcija izbora za svaku nepraznu familiju nepraznih skupova. Neformalno rečeno, aksiom izbora nam govori da za svaku kolekciju nepraznih kutija, moguće je napraviti izbor od tačno jednog objekta iz svake kutije. U mnogim slučajevima, takav je izbor moguće izvršiti ne pozivajući se na aksiom izbora. To je slučaj kada je broj kutija konačan, ili kada postoji neko pravilo po kojem možemo birati objekte, tj. kada postoji osobina koju zadovoljava samo jedan objekat iz svake kutije.

Najčešći primjer je proizvoljna kolekcija parova cipela, jer se iz te kolekcije može izabrati lijeva cipela iz svakog para. Međutim, posmatramo li proizvoljnu kolekciju parova čarapa, željeni izbor možemo izvršiti samo pozivajući se na aksiom izbora.

Aksiom izbora potreban je da bi izabrali skup iz beskonačnog broja čarapa, ali ne iz beskonačnog broja cipela.
(Bertrand Russell)

Kako se aksiom izbora čini veoma jednostavnim i čak očiglednim, dugo je preovladavalo mišljenje da bi se ovaj aksiom mogao izbjeći i dokazati pomoću ostalih aksioma. Međutim, to se pokazalo neuspješnim, i danas se ovaj aksiom najćešće dodaje nizu aksioma ZF0-ZF9. Skupa, ovih 11 aksioma čine tzv. ZFC sistem aksioma, koji se smatra standardnom formom aksiomatske teorije skupova.

Iako zvuči sasvim naivno, aksiom izbora jedan je od temeljnih aksioma u matematici. U literaturi se mogu pronaći desetine ekvivalentih formulacija ovog aksioma, među kojima su svakako najpoznatiji teorem o dobro uređenim skupovima i Zornova lemma.

Teorem o dobro uređenim skupovima nam govori da se svaki skup može dobro urediti, tj. za svaki skup X postoji relacija $\preceq$ tako da je $(X, \preceq)$ dobro uređen skup, odnosno $(X, \preceq)$ je parcijalno uređen skup čiji svaki neprazni podskup ima najmanji element. Iako se može pokazati da je ovaj teorem ekvivalentan aksiomu izboru, koji nam zvuči sasvim uvjerljivo, ovaj teorem se čini potpuno nevjerovatnim. Naprimjer, teorem o dobro uređenim skupovima nam govori da se skup $\mathbb{R}$ može dobro urediti. Međutim, posmatramo li njegov neprazni podskup $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$, možemo se zapitati koji je najmanji element ovog skupa? Koliko god uzmemo mali broj $\varepsilon \in (0,1)$, uvijek postoji broj $\frac{\varepsilon}{2}$ koji je od njega manji, pa $(0,1)$ nema najmanji (odnosno "prvi") element. Zaista, skup $(\mathbb{R}, \leq)$, pri čemu je $\leq$ relacija prirodnog uređenja realnih brojeva, nije dobro uređen skup. Teorem o dobrom uređenim skupovima nam govori da postoji neka relacija $\preceq$ takva da je $(\mathbb{R}, \preceq)$ dobro uređen, iako nam nije poznato kako ta relacija ustvari izgleda. Sada je očito da teorem o dobro uređenim skupovima implicira aksiom izbora, jer za svaku nepraznu kolekciju nepraznih skupova možemo izabrati po jedan element iz svakog skupa - njegov najmanji element.

Još jedna veoma poznata tvrdnja ekvivalentna aksiomu izbora je Zornova lemma, koja tvrdi da svaki neprazan parcijalno uređen skup X, u kojem svaki lanac ima majorantu u X, ima barem jedan maksimalan element.

Aksiom izbora je očigledno tačan, teorem o dobro uređenim skupovima je očito netačan, a Zornova lemma - ko zna?
(Jerry Bona)

Naravno, radi se o šali, jer su tri navedene tvrdnje međusobno ekvivalentne, kao što je već spomenuto. Međutim, većina matematičara/ki smatra aksiom izbora intuitivno tačnim, toerem o dobro uređenim skupovima intuitivno netačnim, a Zornovu lemmu previše složenom da bismo se mogli koristiti intuicijom za rasuđivanje o njenoj tačnosti. Međutim, date je ekvivalencije zaista moguće dokazati, no ti dokazi prevazilaze okvir ovog kursa. Još neke od teorema koje su ekvivalentne aksiomu izbora su:

- Svaka surjektivna funkcija ima desni inverz, tvrdnja koja je dokazana u nekom od zadataka u prethodnoj sekciji.
- Cantor-Bernstein-Schröder teorem, jedan od najvažnijih rezultata o kardinalnim brojeva, naveden i dokazan u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13).
- Tarskijev teorem: Za svaki neprazan skup X, postoji bijekcija $X \to X \times X$.
- Svaki vektorski prostor ima bazu, jedan od najvažnijih rezultata iz linearne algebre.
- Tychonoffov teorem: Proizvod kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.

Mnogi rezultati koriste aksiom izbora u svojim dokazima, i nije ih moguće pokazati koristeći samo aksiome ZF0-ZF9. Neki od takvih su:

- Svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup.
- Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
- Lebesgueova mjera prebrojive disjunktne unije mjerljivih skupova jednaka je zbiru mjera pojedinačnih skupova.
- Hahn-Banachov teorem iz funkcionalne analize, koji dozvoljava ekstenziju linearnih funkcionala.
- Svaki Hilbertov prostor ima ortonormiranu bazu.

Pri dokazivanju tvrdnji za koje je neophodan aksiom izbora, najčešće se koristi njemu ekvivalentna Zornova lemma. Za kraj ove sekcije ćemo ilustrirati tipičan primjer primjene ove lemme, jer se ona primjenjuje u dokazu velikog broja važnih matematičkih teorema, kada želimo pokazati egzistenciju određenih objekata, bez da ih moramo eksplicitno konstruisati (kao npr. baza vektorskog prostora). Da bismo mogli primjeniti ovu lemmu, potrebno je dakle prvo ispitati da li su zadovoljene sve njene pretpostavke, tj. potrebno je posmatrati neki neprazan parcijalno uređen skup X i provjeriti da li svaki lanac u X ima majorantu, i to majorantu u skupu X. Zornova lemma nam tada obezbjeđuje egzistenciju maksimalnog elementa skupa X.

ZADATAK 2.4.2. *Neka je $R \subseteq A \times B$ relacija takva da je $D_1(R) = A$. Tada postoji $f \subseteq R$ takav da je f funkcija iz skupa A u skup B.*

Rješenje: Neka je $\mathcal{F} = \{g \subseteq R \mid g \text{ funkcija } \}$, i na njoj posmatrajmo relaciju parcijalnog uređenja $\subseteq$. Familija $\mathcal{F}$ je sigurno neprazna jer postoji funkcija $g = \emptyset \subseteq R$, pa barem $\emptyset \in \mathcal{F}$. Tvrdimo da svaki lanac u $\mathcal{F}$ ima majorantu u $\mathcal{F}$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan lanac $\{g_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ u $\mathcal{F}$. Tada je

$$g = \cup_{i \in I} g_i : \cup_{i \in I} A_i \to B$$

očito majoranta datog lanca. Međutim, potrebno je provjeriti da li je ta majoranta u $\mathcal{F}$, odnosno da li je $g \subseteq R$ i g funkcija. Kako za sve $i \in I$ vrijedi $g_i \subseteq R$ (jer je $g_i \in \mathcal{F}$), jasno je da onda i

$$g = \cup_{i \in I} g_i \subseteq R.$$

Da bismo pokazali da je $g : \cup_{i \in I} A_i \to B$ funkcija, potrebno je provjeriti osobine (1) i (2) iz definicije funkcije.

Neka je $x \in \cup_{i \in I} A_i$ proizvoljan. Na osnovu definicije unije, činjenice da je $g_i : A_i \to B$ funkcija (jer je $g_i \in \mathcal{F}$) i definicije relacije g, imamo

$$\begin{aligned} x \in \cup_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(\exists y \in B)((x, y) \in g_i) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in B)(\exists i \in I)((x, y) \in g_i) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in B)((x, y) \in \cup_{i \in I} g_i) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in B)((x, y) \in g), \end{aligned}$$

pa $g : \cup_{i \in I} A_i \to B$ zadovoljava osobinu (1) iz definicije funkcije.

Neka su $(x, y_1) \in g$ i $(x, y_2) \in g$. Na osnovu definicije relacije g, definicije unije, činjenice da je $\{g_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ lanac zbog koje za svaka dva $i, j \in I$

vrijedi $g_i \subseteq g_j$ ili $g_j \subseteq g_i$ (bez umanjenja općenitosti ovdje je pretpostavljeno da je $g_i \subseteq g_j$), te konačno zbog činjenica da je $g_j : A_j \to N$ funkcija (jer je $g_j \in \mathcal{F}$), imamo

$$\begin{aligned}
(x, y_1) \in g \wedge (x, y_2) \in g &\Leftrightarrow (x, y_1) \in \cup_{i\in I} g_i \wedge (x, y_2) \in \cup_{i\in I} g_i \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in I)((x, y_1) \in g_i) \wedge (\exists j \in J)((x, y_2) \in g_j) \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in I)((x, y_1) \in g_i) \wedge (\exists j \in J)((x, y_2) \in g_j) \\
&\Leftrightarrow (\exists j \in I)((x, y_1) \in g_j \wedge (x, y_2) \in g_j) \\
&\Rightarrow y_1 = y_2
\end{aligned}$$

pa $g : \cup_{i\in I} A_i \to B$ zadovoljava osobinu (2) iz definicije funkcije.
Dakle, $g \in \mathcal{F}$, pa su zadovoljene pretpostavke Zornove lemme, koja onda implicira da $\mathcal{F}$ ima maksimalan element $f : A_0 \to B$. Tvrdimo da je $A_0 = A$. Pretpostavimo suprotno, $A_0 \neq A$, tj. postoji $a \in A$, $a \notin A_0$. Kako je $D_1(R) = A$, postoji $b \in B$ takav da je $(a, b) \in R$. Onda je $f \cup \{(a, b)\} \supsetneq f$ funkcija $A_0 \cup \{a\} \to B$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je f maksimalan element u $\mathcal{F}$. Dakle, $A_0 = A$, pa je tvrdnja dokazana. ▲

Zadaci za samostalan rad

ZADATAK 2.4.3. *Neka su* $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 5\}$, $A_3 = \{2, 4, 5\}$ *i* $A_4 = \{3, 4\}$. *Koje od sljedećih funkcija su funkcije izbora?*

(a) $f_1 = \{(A_1, 1), (A_2, 2), (A_3, 3), (A_4, 4)\}$

(b) $f_2 = \{(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 4), (A_4, 4)\}$

(c) $f_3 = \{(A_1, 2), (A_2, 1), (A_3, 4), (A_4, 3)\}$

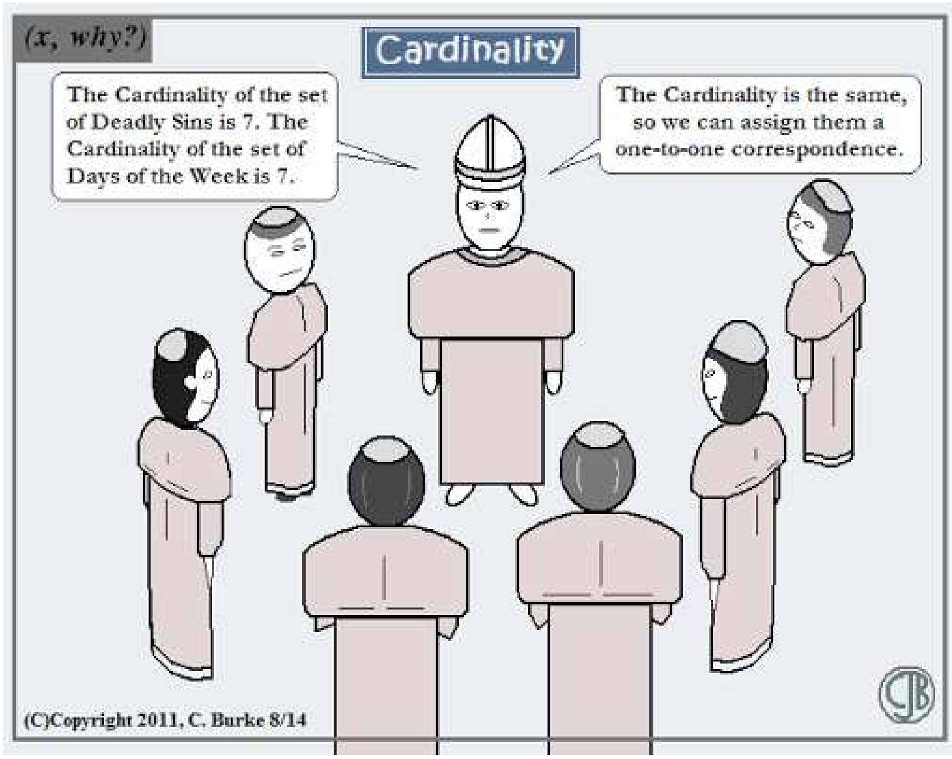
(d) $f_4 = \{(A_1, 3), (A_2, 5), (A_3, 1), (A_4, 3)\}$

Poglavlje 3

Kardinalni brojevi

U najvećem dijelu zadataka iz ovog poglavlja cilj će biti odrediti kardinalni broj nekih konkretnih skupova. Da bi se moglo pristupiti njihovom rješavanju, studenti/ce se prvobitno trebaju upoznati prvenstveno sa definicijom kardinalnog broja, a zatim sa svim rezultatima koji su navedeni u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) u obliku lemma i teorema, jer ćemo ih ovdje redovno koristiti. Preporučuje se i razumijevanje dokaza svih tvrdnji, jer se u njima često kriju "trikovi" koji nam pomažu i pri rješavanju konkretnih zadataka. Zbog prirode zadataka navedenih iz ove oblasti, ovaj put nije napravljena podjela poglavlja u sekcije kao u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13).

Postoje dvije osnovne metode prebrojavanja skupova. Jednu smo naučili još kao mala djeca: da bismo prebrojili objekte u nekom skupu, svakom objektu pridružimo naziv jednog prirodnog broja (jedna čokolada, dvije čokolade, tri čokolade). Druga i vjerovatno starija metoda uključuje direktno uspoređivanje članova dvaju skupova: ako svaki objekt prvog skupa možemo pridružiti tačno jednom objektu drugog skupa, pri čemu različitim elementima prvog skupa pridružujemo različite elementa drugog skupa i pri čemu za svaki element drugog skupa postoji neki element u prvom skupu kojem je pridružen, skupovi imaju jednak broj elemenata. Dok još nije uveden koncept broja, kako je pastir mogao znati koliko ima ovaca, tj. kako je mogao znati da li su se sve njegove ovce vratile sa ispaše? Ujutro, prilikom vođenja ovaca na ispašu, pastir bi u džep ubacio po jedan kamenčić za svaku ovcu koja izlazi iz štale, a pri povratku sa ispaše za svaku ovcu koja ulazi u štalu bi vadio po jedan kamenčić iz džepa. Uspoređujući broj ovaca sa brojem kamenčića u džepu, pastir je mogao dobiti odgovor na svoje pitanje.



Sada se vjerovatno čini veoma prirodnom definicija o ekvipotentnosti skupova, ako to do sada nije bila. Skupovi A i B su ekvipotetni, tj. $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ akko postoji bijekcija $f : A \to B$.

ZADATAK 3.0.4. *Dokazati ekvipotentnost sljedećih skupova.*

(a) $A = \{2, 7, 19\}$ *i* $B = \{153, 1001, 10^{12}\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ *i* $B = \{-1, -2, -3, \dots\}$

(c) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ *i* $B = \{1, 3, 5, \dots\}$

(d) $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$

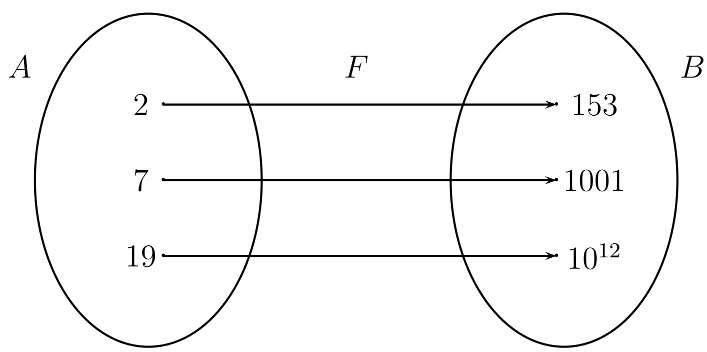
(e) $A = [a, b]$ *i* $B = [c, d]$

(f) $X \times Y$ *i* $Y \times X$

(g) A je skup svih realnih rastućih funkcija realne promjenljive i B je skup svih realnih opadajućih funkcija realne promjenljive

Rješenje: Na osnovu definicije ekvipotentnosti, potrebno je konstruisati bijekciju između skupova A i B.

(a) Neka je $F : A \to B$ preslikavanje dato sa



Preslikavanje F je očito dobro definirana bijekcija, pa je $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

(b) Neka je
$$F : A \to B : n \to -n,$$
tj. neka je F preslikavanje dato sa $F(n) = -n$. Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

(c) Neka je

$$F : A \to B : n \to 2n - 1,$$

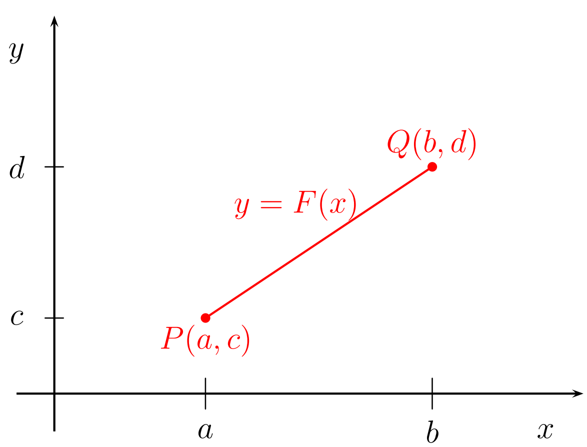
tj. neka je F preslikavanje dato sa $F(n) = 2n - 1$. Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

(d) Neka je

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \to \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 2k \ (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{n+1}{2}, & n = 2k - 1 \ (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases},$$

tj. neka je F preslikavanje dato sa $F(2k) = k$ i $F(2k - 1) = -k$. Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z})$.

(e) Jedna od najjednostavnijih bijekcija između segmenata $[a, b]$ i $[c, d]$ je jednačina prave kroz tačke (a, c) i (b, d).



Prisjetimo se da je jednačina prava kroz dvije tačke $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ data sa

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

pa ćemo posmatrati funkciju

$$F : [a, b] \to [c, d] : x \to \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c,$$

tj. funkciju F definiranu sa $F(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$.

Tvrdimo da je $F : [a, b]$ dobro definirana, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall x \in [a, b])(F(x) \in [c, d]).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $x \in [a, b]$. Kako je $a \neq b$ i $c \neq d$, na osnovu definicije funkcije F, zaista vrijedi

$$\begin{aligned} x \in [a, b] &\Leftrightarrow a \leq x \leq b \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x - a \leq b - a \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{d - c}{b - a}(x - a) \leq d - c \\ &\Leftrightarrow c \leq \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c \leq d \\ &\Leftrightarrow c \leq F(x) \leq d \\ &\Leftrightarrow F(x) \in [c, d], \end{aligned}$$

pa je F dobro definirana funkcija.

Tvrdimo da je $F : [a, b] \to [c, d]$ injekcija, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in [a, b])(F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

U tu svrhu posmatrajmo $x_1, x_2 \in [a, b]$ takve da $F(x_1) = F(x_2)$. Na osnovu definicije funkcije F, i činjenica $a \neq b$, $c \neq d$, zaista vrijedi

$$\begin{aligned} F(x_1) = F(x_2) &\Leftrightarrow \frac{d - c}{b - a}(x_1 - a) + c = \frac{d - c}{b - a}(x_2 - a) + c \\ &\Leftrightarrow \frac{d - c}{b - a}(x_1 - a) = \frac{d - c}{b - a}(x_2 - a) \\ &\Leftrightarrow x_1 - a = x_2 - a \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

pa je F injektivna funkcija.

Tvrdimo da je $F : [a, b] \to [c, d]$ surjekcija, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall y \in [c, d])(\exists x \in [a, b])(y = F(x)).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $y \in [c, d]$. Na osnovu definicije funkcije F, i činjenica $a \neq b$, $c \neq d$, imamo

$$\begin{aligned} y = F(x) = \tfrac{d-c}{b-a}(x - a) + c &\Leftrightarrow y - c = \frac{d - c}{b - a}(x - a) \\ &\Leftrightarrow \frac{b - a}{d - c}(y - c) = x - a \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{b-a}{d-c}(y - c) + a \end{aligned}$$

pa

$$(\forall y \in [c,d])(\exists x = \frac{b-a}{d-c}(y-c)+a \in [a,b])(y = F(x)).$$

Dakle, F je surjektivna funkcija.

Zaključujemo da je $F : [a,b] \to [c,d]$ dobro definirana bijektivna funkcija, pa je $\text{card}([a,b]) = \text{card}([c,d])$.

(f) Neka je

$$F : X \times Y \to Y \times X : (x,y) \to (y,x),$$

tj. neka je F preslikavanje dato sa $F(x,y) = (y,x)$. Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je $\text{card}(X \times Y) = \text{card}(Y \times X)$.

(g) Neka je

$$F : A \to B : f \to -f,$$

tj. neka je F preslikavanje dato sa $F(f) = -f$. Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

▲

ZADATAK 3.0.5. *Ako je $A \sim B$ i $C \sim D$, dokazati da vrijedi $A \times C \sim B \times D$.*

Rješenje: Neka je $A \sim B$ i $C \sim D$. Na osnovu definicije ekvipotentnosti skupova, to znači da postoje bijekcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$. Želimo pokazati da je $A \times C \sim B \times D$, tj. da postoji bijekcija između skupova $A \times C$ i $B \times D$. Posmatrajmo funkciju

$$F : A \times C \to B \times D : (a,c) \to (f(a), g(c)),$$

tj. funkciju F definiranu sa $F((a,c)) = (f(a), g(c))$, i dokažimo da je ona bijektivna. Kako su funkcije f i g dobro definirane, za sve $a \in A$ i $c \in C$ vrijedi $f(a) \in B$ i $g(c) = d$, pa za sve $(a,c) \in A \times C$ vrijedi $F((a,b)) = (f(a), g(c)) \in B \times D$. Dakle, F je dobro definirana funkcija, te je preostalo pokazati injektivnost i surjektivnost.

Tvrdimo da je $F : A \times C \to B \times D$ injekcija, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall (a_1, c_1), (a_2, c_2) \in A \times C)(F((a_1, c_1)) = F((a_2, c_2))c \Rightarrow (a_1, c_1) = (a_2, c_2)).$$

U tu svrhu posmatrajmo $(a_1, c_1), (a_2, c_2) \in A \times C$ takve da $F((a_1, c_1)) = F((a_2, c_2))$. Na osnovu definicije funkcije F, definicije jednakosti uređenih parova, te injektivnosti funkcija f i g

$$\begin{aligned} F((a_1, c_1)) = F((a_2, c_2)) &\Leftrightarrow (f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2)) \\ &\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \wedge g(c_1) = g(c_2) \\ &\Rightarrow a_1 = a_2 \wedge c_1 = c_2 \\ &\Leftrightarrow (a_1, c_1) = (a_2, c_2), \end{aligned}$$

pa je F zaista injekcija.

Tvrdimo da je $F : A \times C \to B \times D$ surjekcija, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall (b, d) \in B \times D)(\exists (a, c) \in A \times C)((b, d) = F((a, c))).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $(b, d) \in B \times D$. Na osnovu surjektivnosti funkcija f i g, činjenice

$$[(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists y)(Q(y))] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)),$$

definicije jednakosti uređenih parova i definicije funkcije F, imamo

$$\begin{aligned} (b, d) \in B \times D &\Leftrightarrow b \in B \wedge d \in D \\ &\Rightarrow (\exists a \in A)(b = f(a)) \wedge (\exists c \in C)(d = g(c)) \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists c \in C)(b = f(a) \wedge d = g(c)) \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists c \in C)((b, d) = (f(a), g(c))) \\ &\Leftrightarrow (\exists (a, c) \in A \times C)((b, d) = F((a, c)), \end{aligned}$$

pa je F surjekcija.

Zaključujemo da je $F : A \times C \to B \times D$ dobro definirana bijektivna funkcija, pa je $\operatorname{card}(A \times C) = \operatorname{card}(B \times D)$.

Napomenimo ovdje još da, radi jednostavnosti zapisa po dogovoru inače pišemo $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ umjesto $F((x_1, x_2, \ldots, x_n))$. ▲

U prethodna dva zadatka, potrebno je bilo pokazati da su određeni skupovi ekvipotentni, ali nije se zahtijevalo odrediti kardinalni broj tih skupova, što će najčešće biti slučaj u zadacima koji slijede. Da bismo odredili kardinalni broj nekog datog skupa S, na osnovu definicije ekvipotetnih skupova, dovoljno je formirati bijekciju između skupa S i nekog skupa čiji je kardinalni broj poznat, najčešće nekog skup koji ima kardinalni broj $\aleph_0$, c ili 2^c. Pri rješavanju zadataka u nastavku, smatrati ćemo poznatim kardinalnosti skupova poput skupova navedenih u sljedećoj tabeli, jer je većina ovih rezultata dokazana u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13).

$\aleph_0$	$2^{\aleph_0} c$	2^c
$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$
$\mathbb{Z}$	$(0,1)$	$\mathcal{P}((0,1))$
$3\mathbb{N}$	$[3,10]$	$\mathcal{P}([3,7))$
$5\mathbb{Z}+2$	$[7,12)$	$\vdots$
$\mathbb{Q}$	$(-\infty,4]$	
$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	
$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$	$\mathbb{C}$	
$\mathbb{Z}^4$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	
$\vdots$	$\vdots$	

U svakom slučaju, studenti/ce trebaju znati pokazati da ovi skupovi imaju navedene kardinalnosti, što može biti glavni ili jedini dio zadatka.

ZADATAK 3.0.6. *Odrediti kardinalni broj sljedećih skupova.*

(a) A je skup svih kružnica u ravni.

(b) B je skup svih pravih u ravni koje prolaze kroz koordinatni početak.

(c) C je skup svih vektora u ravni čiji krajevi imaju cjelobrojne koordinate.

(d) D je skup svih elipsi sa središtem u koordinatnom početku čije su dužine polusa prirodni brojevi.

Rješenje:

(a) Neka je A skup svih kružnica u ravni. Svaka kružnica $k \in A$ jedinstveno je određena svojim centrom $C(p,q)$ i poluprečnikom r, pri čemu je $p,q \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}_+$, pa ćemo posmatrati preslikavanje

$$F : A \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : k(C(p,q),r) \to (p,q,r).$$

Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) = c.$$

(b) Neka je B skup svih pravih u ravni koje prolaze kroz koordinatni početak. Svaka prava $p \in B$ jedinstveno je određena uglom α koji ta prava zaklapa sa osom O_x, pri čemu je $\alpha \in [0, 2\pi)$, pa ćemo posmatrati preslikavanje

$$F : B \to [0, 2\pi) : p(\alpha) \to \alpha.$$

Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je

$$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}([0, 2\pi)) = c.$$

(c) Neka je C skup svih vektora u ravni čiji krajevi imaju cjelobrojne koordinate. Svaki vektor $\overrightarrow{PQ} \in C$ jedinstveno je određen sa svojim krajnjim tačkama $P(s, t)$ i $Q(u, v)$, pri čemu su $s, t, u, v \in \mathbb{Z}$, pa ćemo posmatrati preslikavanje

$$f : C \to \mathbb{Z}^4 : \overrightarrow{PQ} \to (s, t, u, v).$$

Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je

$$\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}^4) = \aleph_0.$$

(d) Neka je D skup svih elipsi sa središtem u koordinatnom početku čije su dužine polusa prirodni brojevi. Svaka elipsa $e \in D$ jedinstveno je određena sa dužinama svojih polusa $a, b \in \mathbb{N}$, pa ćemo posmatrati preslikavanje

$$f : D \to \mathbb{N}^2 : e(C(0, 0), a, b)) \to (a, b).$$

Jednostavno se provjerava da je F dobro definirana bijekcija (što se ostavlja studentima/cama za vježbu), pa je

$$\mathrm{card}(D) = \mathrm{card}(\mathbb{N}^2) = \aleph_0.$$

▲

ZADATAK 3.0.7. *Odrediti kardinalnost skupa svih zatvorenih segmenata u $\mathbb{R}$ čija je dužina racionalan broj.*

Rješenje: Neka je $S = \{[a,b] \subseteq \mathbb{R} \mid b - a \in \mathbb{Q}\}$. Posmatrajmo funkciju

$$F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+ : [a,b] \to (a, b-a),$$

tj. funkciju f definiranu sa $F([a,b]) = (a, b-a)$ i pokažimo da je ona bijektivna. Na osnovu definicije skupa S, za svaki interval $[a,b] \in S$ vrijedi $a \in \mathbb{R}$ i $b - q \in \mathbb{Q}_+$, pa je zaista $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$, odnosno F je dobro definirana funkcija. Preostalo je pokazati da je F injektivna i surjektivna.

Tvrdimo da je $F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$ injekcija, tj. tvrdimo da

$$(\forall [a,b], [c,d] \in S)(F([a,b]) = F([c,d]) \Rightarrow [a,b] = [c,d]).$$

U tu svrhu posmatrajmo $[a,b], [c,d] \in S$ takve da $F([a,b]) = F([c,d])$. Na osnovu definicije funkcije F i definicije jednakosti uređenih parova imamo

$$\begin{aligned} F([a,b]) \neq F([c,d]) &\Leftrightarrow (a, b-a) = (c, d-c) \\ &\Leftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b - a = d - c \\ &\Leftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d \\ &\Leftrightarrow [a,c] = [b,d], \end{aligned}$$

pa je F zaista injekcija.

Tvrdimo da je $F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$ surjekcija, tj. tvrdimo da

$$(\forall (a,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+)(\exists [x,y] \in S)((a,q) = F([x,y])).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $(a,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$. Ako odaberemo $x = a$, $y = a + q$, tada je očito

$$F([x,y]) = (x, y - x) = (a, a + q - a) = (a, q),$$

pa zaista vrijedi

$$(\forall (a,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+)(\exists [x,y] = [a, a+q] \in S)((a,q) = F([x,y])).$$

Dakle, F je surjekcija.

Zaključujemo da je funkcija $F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$ dobro definirana bijekcija, pa je

$$\text{card}(S) = \text{card}(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+) = c.$$

▲

Ako želimo pokazati da su skupovi A i B ekvipotentni, tj. da je $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, na osnovu definicije ekvipotentnosti skupova treba pokazati da postoji bijekcija $f : A \to B$. Međutim, u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) dokazan je teorem da je $\text{card}(A) \le \text{card}(B)$ akko postoji injekcija $\phi : A \to B$. Dakle, pokažemo li da postoje injekcije $\phi : A \to B$ i $\theta : B \to A$, pokazali smo da vrijedi $\text{card}(A) \le \text{card}(B)$ i $\text{card}(B) \le \text{card}(A)$, pa na osnovu Cantor-Bernstein-Schröder teorema vrijedi $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Također, može se pokazati da je $\text{card}(A) \ge \text{card}(B)$ akko postoji surjekcija $u : A \to B$ (odličan zadatak za vježbu), pa ekvipotentnost skupova A i B, na osnovu Cantor-Bernstein-Schröder teorema, možemo pokazati dokazajući egzistenciju surjekcija $u : A \to B$ i $v : B \to A$, ili to možemo učiniti kombinirajući navedene metode.

Dakle, Cantor-Bernstein-Schröder teorem nam govori da je

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \text{card}(A) \le \text{card}(B) \quad \wedge \quad \text{card}(A) \ge \text{card}(B),$$

a dalje imamo

$$\begin{array}{rll} & \text{card}(A) \le \text{card}(B) & \wedge \ \ \text{card}(A) \ge \text{card}(B) \\ \Leftrightarrow & (\exists f : A \to B)(f \text{ injekcija}) & \wedge \ \ (\exists g : B \to A)(g \text{ injekcija}) \\ \Leftrightarrow & (\exists f : A \to B)(f \text{ injekcija}) & \wedge \ \ (\exists g : A \to B)(g \text{ surjekcija}) \\ \Leftrightarrow & (\exists f : B \to A)(f \text{ surjekcija}) & \wedge \ \ (\exists g : B \to A)(g \text{ injekcija}) \\ \Leftrightarrow & (\exists f : B \to A)(f \text{ surjekcija}) & \wedge \ \ (\exists g : A \to B)(g \text{ surjekcija}), \end{array}$$

te ekvipotentnost skupova A i B možemo dokazati konstruišući direktno bijekciju $A \to B$, ili pokazujući neke od navedene četiri ekvivalentne mogućnosti. U sljedećim zadacima nećemo dodatno objašnjavati gore iznesenu argumentaciju.

ZADATAK 3.0.8. *Odrediti kardinalnost skupa svih zatvorenih segmenata u $\mathbb{R}$ koji su disjunktni sa $\mathbb{Z}$.*

Rješenje: Neka je $S = \{[a, b] \subseteq \mathbb{R} \mid [a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset\}$. Želimo pokazati da je $\text{card}(S) = c$, što ćemo učiniti konstruišući dvije injekcije $F : S \to A$ i

$G : B \to S$, gdje su $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = c$.

Posmatrajmo funkciju

$$F : S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : [a, b] \to (a, b),$$

tj. funkciju F definiranu sa $F([a, b]) = (a, b)$ (gdje je $[a, b]$ segment u $\mathbb{R}$, a (a, b) je uređen par). Funkcija F očito je dobro definirana, a želimo pokazati da je injektivna, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall [a, b], [c, d] \in S)(F([a, b]) = F([c, d]) \Rightarrow [a, b] = [c, d]).$$

U tu svrhu posmatrajmo $[a, b], [c, d] \in S$ takve da $F([a, b]) = F([c, d])$. Na osnovu definicije funkcije F i definicije jednakosti uređenih parova imamo

$$\begin{aligned} F([a, b]) = F([c, d]) &\Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \\ &\Leftrightarrow a = c \wedge b = d \\ &\Leftrightarrow [a, b] = [c, d], \end{aligned}$$

pa je F zaista injekcija. Dakle, vrijedi $\mathrm{card}(S) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = c$.

Posmatrajmo funkciju

$$G : [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] \to S : x \to [x, \frac{1}{2}],$$

tj. funkciju G definiranu sa $G(x) = [x, \frac{1}{2}]$. Funkcija G očito je dobro definirana, jer za svaki $x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ vrijedi $G(x) = [x, \frac{1}{2}] \in S$. Tvrdimo da je G injektivna, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}])(G(x_1) = G(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2).$$

U tu svrhu posmatrajmo $x_1, x_2 \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ takve da $G(x_1) = G(x_2)$. Na osnovu definicije funkcije G imamo

$$\begin{aligned} G(x_1) = G(x_2) &\Leftrightarrow [x_1, \tfrac{1}{2}] = [x_2, \tfrac{1}{2}] \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

pa je G zaista injekcija. Dakle, vrijedi $c = \mathrm{card}([\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]) \leq \mathrm{card}(S)$.

Na osnovu Cantor-Bernstein-Schröder teorema zaključujemo da vrijedi $\mathrm{card}(S) = c$. ▲

ZADATAK 3.0.9. *Odrediti kardinalni broj skupa svih surjekcija iz skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva.*

Rješenje: Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ surjekcija. Kako je ranije objašnjeno, ova činjenica implicira da je $\text{card}(\mathbb{N}) \geq \text{card}(\mathbb{R})$, što je kontradikcija. Dakle, ne postoji niti jedna surjekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pa skup svih surjekcija iz skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva ima kardinalnost 0. ▲

ZADATAK 3.0.10. *Dokazati da je proizvoljan skup međusobno nepresjecajućih intervala (a, b) na realnoj pravoj najviše prebrojiv.*

Rješenje: Neka je S proizvoljan skup međusobno nepresjecajućih intervala na realnoj pravoj, i neka je $(a, b) \in S$ proizvoljan. Kako je poznato iz matematičke analize, između svaka dva realna broja postoji racionalan broj, pa izaberimo neki $q \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Posmatrajmo funkciju $F : S \to \mathbb{Q}$ koje svakom intervalu pridružuje neki racionalan broj u tom intervalu, što je moguće na osnovu AC (Aksiom izbora). Tvrdimo da je F injekcija, tj. tvrdimo da

$$(\forall (a, b), (c, d) \in S)((a, b) \neq (c, d) \Rightarrow F((a, b)) \neq F((c, d))).$$

U tu svrhu posmatrajmo $(a, b), (c, d) \in S$ takve da $(a, b) \neq (c, d)$. Po pretpostavci onda vrijedi da je $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$, pa kako je $F((a, b)) \in (a, b)$ i $F((c, d)) \in (c, d)$, vrijedi $F((a, b)) \neq F((c, d))$. Dakle, $F : S \to \mathbb{Q}$ je injekcija, pa je $\text{card}(S) \leq \text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, tj. S je najviše prebrojiv skup. ▲

ZADATAK 3.0.11. *Odrediti kardinalnost skupa svih podskupova od* $\mathbb{R}$ *koji sadrže skup* $\mathbb{N}$.

Rješenje: Neka je S skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže skup $\mathbb{N}$, tj.

$$S = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{N} \subseteq A\}.$$

Kako je $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, vrijedi $\text{card}(S) \leq \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c$ (jer postoji injekcija $i : S \to \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A \to A$).

S druge strane, posmatrajmo funkciju

$$F : \mathcal{P}((0,1)) \to S : M \to M \cup \mathbb{N},$$

tj. funkciju F definiranu sa $F(M) = M \cup \mathbb{N}$.

Tvrdimo da je $F : \mathcal{P}((0,1)) \to S$ dobro definirana, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall M \in \mathcal{P}((0,1)))(F(M) \in S).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $M \in \mathcal{P}((0,1))$, tj. proizvoljan $M \subseteq (0,1)$. Tada očito vrijedi $\mathbb{N} \subseteq M \cup \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, što na osnovu definicije funkcije F i skupa S upravo znači da je $F(M) \in S$.

Tvrdimo da je $F : \mathcal{P}((0,1)) \to S$ injekcija, tj. tvrdimo da vrijedi

$$(\forall M, N \in \mathcal{P}((0,1)))(F(M) \neq F(N) \Rightarrow M = N).$$

U tu svrhu posmatrajmo $M, N \in \mathcal{P}((0,1))$ takve da $F(M) = F(N)$. Na osnovu definicije funkcije F, nekih jednostavnih skupovnih jednakosti pokazanih u prethodnom poglavlju, te činjenice da su $M, N \subseteq (0,1)$, imamo

$$\begin{array}{rcl} F(M) = F(N) & \Leftrightarrow & M \cup \mathbb{N} = N \cup \mathbb{N} \\ & \Rightarrow & (M \cup \mathbb{N}) \setminus \mathbb{N} = (N \cup \mathbb{N}) \setminus \mathbb{N} \\ & \Leftrightarrow & (M \cup \mathbb{N}) \cap \mathbb{N}^C = (N \cup \mathbb{N}) \cap \mathbb{N}^C \\ & \Leftrightarrow & (M \cap \mathbb{N}^C) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^C) = (N \cap \mathbb{N}^C) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^C) \\ & \Leftrightarrow & (M \setminus \mathbb{N}) \cup \emptyset = (N \setminus \mathbb{N}) \cup \emptyset \\ & \Leftrightarrow & M = N \end{array},$$

pa je F zaista injekcija, što implicira $2^c = \mathrm{card}(\mathcal{P}(0,1)) \leq \mathrm{card}(S)$.

Na osnovu Cantor-Bernstein-Schröder teorema zaključujemo da vrijedi $\mathrm{card}(S) = 2^c$. ▲

ZADATAK 3.0.12. *Odrediti kardinalnost skupa svih nepraznih konačnih podskupova od* $\mathbb{N}$. *Odrediti kardinalnost skupa svih beskonačnih podskupova od* $\mathbb{N}$.

Rješenje: Neka je S skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$, tj.

$$S = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \neq \emptyset \text{ konačan } \}.$$

Da je skup S sačinjen od naprimjer svih tročlanih podskupova od $\mathbb{N}$, zadatak bi bio nešto jednostavniji jer bi svakom tročlanom skupu $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{N}$ mogli/e pridružiti uređenu trojku $(a, b, c) \in \mathbb{N}$, i to pridruživanje bi očito bila dobro definirana bijekcija, pa bi kardinalnost skupa svih tročlanih poskupova od $\mathbb{N}$ bila jednaka $\mathrm{card}(\mathbb{N}^3) = \aleph_0$. Slično, ukoliko bi S bio skup svih dvočlanih, četveročlanih ili sedmočlanih podskupova od $\mathbb{N}$ (ili u općem slučaju, skup svih podskupova od $\mathbb{N}$ koji imaju n elemenata), skupu S bi mogli/e pridružiti skup svih uređenih parova, četvorki ili sedmorki (ili u općem slučaju, skup svih n-torki) u $\mathbb{N}$, te tako odrediti njegovu kardinalnost. U ovom zadatku, skup S sačinjen je od svih konačnih podskupova skupa $\mathbb{N}$ (dakle, svih jednočlanih, dvočlanih, tročlanih, četveročlanih, sedmočlanih ... podskupova), ali ćemo za rješavanje ovog zadatka koristiti već izloženu ideju. Naime, prvo ćemo skup S "razbiti" na skup svih jednočlanih, skup svih dvočlanih, skup svih tročlanih, skup svih četveročlanih, skup svihsedmočlanih ... podskupova, te ćemo izračunati kardinalnost svih ovih skupova, a onda jednostavno i zaključiti koja je kardinalnost skupa S.

Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo skup S_n kao $S_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathrm{card}(A) = n\}$. Očito je da vrijedi

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Posmatrajmo funkciju

$$F : S_n \to \mathbb{N}^n : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

tj. funkciju F definiranu sa $F(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nije teško pokazati da je funkcija F dobro definirana i bijektivna (što je ostavljeno studentima/cama za vježbu), pa (na osnovu Teorema 3.3.7) vrijedi

$$\mathrm{card}(S_n) = \mathrm{card}(\mathbb{N}^n) = \aleph_0,$$

tj. skup S_n je prebrojiv. Dakle, skup S je prebrojiva unija prebrojivih skupova, pa je i sam prebrojiv (na osnovu Teorema 3.3.6).

Neka je T skup svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{N}$, tj.

$$T = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ beskonačan }\}.$$

Očito vrijedi $S \cup T = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $S \cap T = \emptyset$, pa je $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(S) + \mathrm{card}(T)$, tj. $c = \aleph_0 + \mathrm{card}(T)$. Na osnovu Teorema 3.3.3 zaključujemo da vrijedi $\mathrm{card}(T) = c$. ▲

ZADATAK 3.0.13. *Odrediti kardinalnost skupa svih podskupova od* $\mathbb{N}$ *kojima je komplement (u* $\mathbb{N}$*) konačan.*

Rješenje: Neka je S skup svih svih podskupova od $\mathbb{N}$ kojima je komplement konačan tj.

$$S = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A^C \text{ konačan } \}.$$

Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup S_n definiramo kao $S_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \operatorname{card}(A^C) = n\}$, očito je da vrijedi

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Neka je $A \in S_n$. Tada je $A^C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pa posmatrajmo funkciju

$$F : S \to \mathbb{N}^n : A \to (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Nije teško pokazati da je funkcija F dobro definirana i bijektivna (što je ostavljeno studentima/cama za vježbu), pa (na osnovu Teorema 3.3.7) vrijedi

$$\operatorname{card}(S_n) = \operatorname{card}(\mathbb{N}^n) = \aleph_0,$$

tj. skup S_n je prebrojiv. Dakle, skup S je preborjiva unija prebrojivih skupova, pa je i sam prebrojiv (na osnovu Teorema 3.3.6).

▲

ZADATAK 3.0.14. *Dokazati sljedeće tvrdnje.*

(a) *Skup svih polinoma jedne varijable s cjelobrojnim koeficijentima je prebrojiv.*

(b) *Skup svih algebarskih realnih brojeva je prebrojiv.*

(c) *Postoje transcendetni realni brojevi.*

(d) *Skup svih iracionalnih brojeva ekvipotentan je sa skupom svih transcendentnih realnih brojeva.*

Rješenje:

(a) Neka je S skup svih polinoma jedne varijable s cjelobrojnim koeficijentima, tj.

$$S = \mathbb{Z}[x] = \{P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup S_n definiramo kao skup svih polinoma u S stepena n, tj.

$$\begin{aligned} S_n &= \{P \in S \mid \deg(P) = n\} \\ &= \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

očito je da vrijedi

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Posmatrajmo funkciju

$$F : S_n \to \mathbb{Z}^{n+1} : a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \to (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

tj. funkciju F definiranu sa

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Nije teško pokazati da je funkcija F dobro definirana i bijektivna (što je ostavljeno studentima/cama za vježbu), pa vrijedi

$$\mathrm{card}(S_n) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}^{n+1}) = \aleph_0,$$

tj. skup S_n je prebrojiv. Dakle, skup S je prebrojiva unija prebrojivih skupova, pa je i sam prebrojiv.

(b) Neka je T skup svih algebearskih realnih brojeva. Neka je $t \in T$ proizvoljan. Na osnovu definicije algebarskog broja, t je korijen nekog polinoma $P(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima, pa možemo posmatrati funkciju $G : T \to S : t \to P$, koja svakom algebarskom broju pridružuje polinom u S čiji je korijen upravo t. Nije teško pokazati da je funkcija G dobro definirana i bijektivna (što je ostavljeno studentima/cama za vježbu), pa vrijedi $\mathrm{card}(T) = \mathrm{card}(S) = \aleph_0$, tj. skup T je prebrojiv.

(c) Neka je U skup svih transcendentnih realnih brojeva. Na osnovu definicije transcendetnih brojeva, transcedentni brojevi su svi oni koji nisu algebarski, pa vrijedi

$$\mathbb{R} = T \cup U, \quad T \cap U = \emptyset,$$

što dalje implicira

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(T) + \mathrm{card}(U),$$

tj. $c = \aleph_0 + \mathrm{card}(U)$. Dakle, $\mathrm{card}(U) = c$, pa zasigurno postoje transcedentni brojevi.

(d) U prethodnom dijelu zadatka pokazali smo da je $\mathrm{card}(U) = c$, a poznato je da je $\mathrm{card}(\mathbb{J}) = c$, pa zaista vrijedi $\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(\mathbb{J})$.

▲

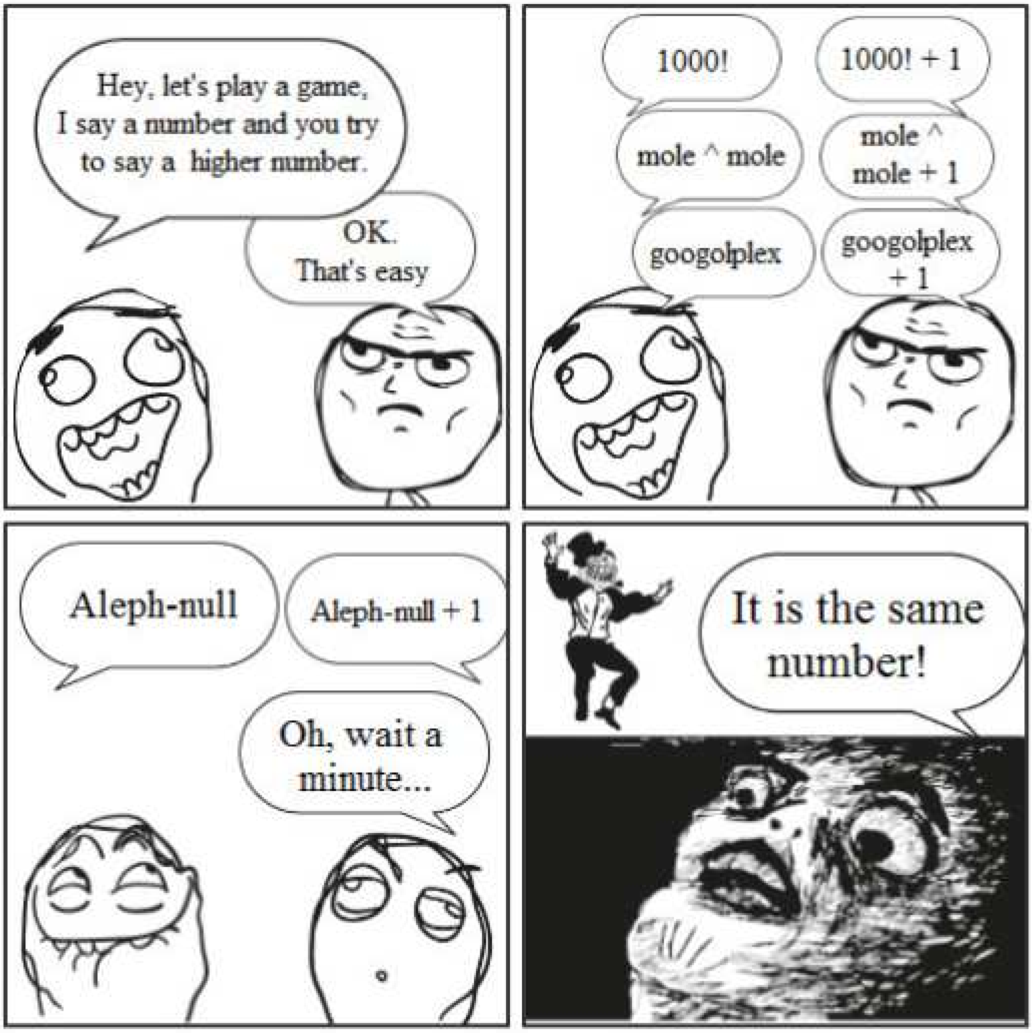
U posljednjoj sekciji "Artimetika kardinalnih brojeva" ovog poglavlja u skripti Teorija skupova (Predavanja 2012/13) uvedene su operacije sabiranja i množenja kardinalnih brojeva, te su navedene osnovne osobine ovih operacija, sa kojima se studenti/ce također trebaju upoznati. Ove operacije ne treba poistovjećivati sa operacijama sabiranja i množenja realnih brojeva, jer kao što je poznato, kardinalni broj je definiran kao klasa ekvivalencije, odnosno familija skupova među kojima postoje bijekcije. Tako naprimjer, kao što je to navedeno u skripti, za kardinalne brojeve ne vrijedi pravilo skraćivanja za sabiranje, tj.

$$\mu + \lambda = \mu + \eta \not\Rightarrow \lambda = \eta,$$

pri čemu su μ, λ, η kardinalni brojevi. Zaista,

$$\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) + \mathrm{card}(\{0\}) = \aleph_0 + 1,$$

ali $0 \neq 1$.



Međutim, vrijedi sljedeća tvrdnja.

ZADATAK 3.0.15. *Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi, i n neki konačan kardinalni broj. Tada vrijedi*

$$\lambda + n = \mu + n \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Rješenje: Primjetimo prvo da λ i μ moraju istovremeno biti ili oba konačna ili oba beskonačna. U prvom slučaju tvrdnja je zadovoljena jer vrijedi zakon skraćivanja za sabiranje prirodnih brojeva. Pretpostavimo stoga da su λ i μ oba beskonačni kardinalni brojevi, i neka $\lambda + n = \mu + n$. Na osnovu Teorema 3.6.4.(1) (odnosno, vrlo jednostavno na osnovu definicije sabiranja kardinalnih brojeva) vrijedi

$$\lambda = \lambda + n = \mu + n = \mu.$$

▲

ZADATAK 3.0.16. *Dokazati da je $c + c = c$.*

Rješenje: Neka je $X = (0, 1)$ i $Y = (1, 2)$. Skupovi X i Y su disjunktni i za njih vrijedi $\mathrm{card}(X) = c$ i $\mathrm{card}(Y) = c$, pa je na osnovu definicije zbira kardinalnih brojeva

$$c + c = \mathrm{card}(X \cup Y) = \mathrm{card}((0, 1) \cup (1, 2)) = c.$$

▲

Zadaci za samostalan rad

ZADATAK 3.0.17. *Odrediti kardinalnost skupa svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{Q}$.*

ZADATAK 3.0.18. *Odrediti kardinalnost sljedećih skupova.*

(a) *Skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{R}$.*

(b) *Skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ čiji je komplement (u $\mathbb{R}$) konačan.*

(c) *Skup svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{R}$.*

(d) *Skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ čiji je komplement (u $\mathbb{R}$) beskonačan.*

(e) *Skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji su ekvipotentni sa $\mathbb{R}$.*

(f) *Skup svih prebrojivih podskupova od $\mathbb{R}$.*

(g) *Skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ čiji je komplement (u $\mathbb{R}$) prebrojiv.*

ZADATAK 3.0.19. *Odrediti kardinalnost skupa svih realnih matrica* 2×2 *čija je determinanta jednaka* 1.

ZADATAK 3.0.20. *Odrediti kardinalnost skupa svih dijagonalnih kompleksnih matrica.*

ZADATAK 3.0.21. *Koliko ima neprebrojivih podskupova skupa koji ima kardinalni broj* c?

ZADATAK 3.0.22. *Dokazati da postoji neprebrojivo mnogo disjunktnih kružnica u ravni.*

ZADATAK 3.0.23. *Neka je* R *skup svih realnih rastućih funkcija realne promjenljive, a* M *skup svih realnih monotonih funkcija realne promjenljive. Ako je* $\operatorname{card}(R) = c$, *odrediti* $\operatorname{card}(M)$.

ZADATAK 3.0.24. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}$ *takav da postoji* $\delta > 0$ *tako da za sve* $x, y \in A$, $x \neq y$, *vrijedi* $|x - y| \geq \delta$. *Dokazati da je tada skup* A *konačan ili prebrojiv.*

ZADATAK 3.0.25. *Odrediti kardinalnost skupa svih uređenih parova* (A, B), *gdje je* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$.

ZADATAK 3.0.26. *Dokazati da za sve beskonačne kardinalne brojeve* μ *vrijedi* $2^{\mu} = \mu^{\mu}$.

ZADATAK 3.0.27. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova, i neka je na $\mathcal{F}$ definirana relacija na sljedeći način*

$$X \preceq Y \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y) \qquad (X, Y \in \mathcal{F}).$$

Dokazati da je $\preceq$ relacija poretka na $\mathcal{F}$. Da li je $\preceq$ relacija potpunog uređenja?