NUMERIČKA ANALIZA
Osnovni rezultati i formule

Renata Turkeš

7. lipnja 2014.

Ovaj dokument sadrži osnovne rezultate i formule iz predmeta Numerička analiza koji se održava na III godini dodiplomskog studija na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli (odsjek Matematika, smjer Primjenjena matematika), pa je stoga prvobitno namijenjen studentima/cama koji/e pohađaju navedeni kurs, ali i svima koji/e smatraju da im može biti od pomoći.

Literatura korištena za pripremu ovog materijala uglavnom je sljedeća:

1. R. Scitovski, *Numerička matematika* (Poglavlja I, II, IV, VII)

2. A. Zolić, *Numerička matemtika* (Poglavlja I, II, III, IV).

Kroz nekoliko nastavnih cjelina, dat je kratki pregled osnovnih rezultata iz oblasti numeričke analize, kao pomoć pri rješavanju zadataka iz ove discipline, te kao takav ne treba biti shvaćen kao materijal za predavanja ili vježbe. Detaljno su izvedene samo one formule za koje je to jednostavno učiniti, i čije izvođenje olakšava samo memoriziranje te formule, a kako bi materijal bio što kraći i što više poslužio svrsi, pristup je izrazito neformalan i time nerijetko neprecizan. Također, u ovom materijalu nije naveden niti jedan primjer, ali su preporučeni konkretni zadaci koji se mogu pronaći u gore navedenoj literaturi. Ovaj materijal dostupan je svima za download na

`http://renataturkes.wix.com/renata-turkes#!numerical-analysis/c1j9x`,

a na istoj stranici mogu se pronaći i navedeni udžbenici, kao i neke druge korisne upute i linkovi.

Sva pitanja, komentare, sugestije i uočene greške molim šaljite na renata.turkes@hotmail.com. Unaprijed se zahvaljujem, i svima želim ugodan rad.

Sadržaj

I PROCJENE GREŠKE

GREŠKE PRIBLIŽNE VRIJEDNOSTI BROJA

Tačna vrijednost broja: x.
Približna vrijednost (aproksimacija) broja: x^*.

Stvarna greška aproksimacije: $x - x^*$
Apsolutna greška aproksimacije: $\Delta x^* = |x - x^*|$
Relativna greška aproksimacije: $\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x|} \approx \frac{\Delta x^*}{|x^*|}$
Granica greške aproksimacije: Broj ε takav da $\Delta x^* = |x - x^*| \leq \varepsilon$. Pišemo $x = x^* \pm \varepsilon$.

GREŠKE PRIBLIŽNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE

Tačna vrijednost funkcije: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Približna vrijednost funkcije: $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.
Treba izračunati grešku aproksimacije funkcije, tj. grešku prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije ako su vrijednosti nezavisnih varijabli približni brojevi.

Ukoliko je funkcija f monotona po promjenljivim $x_1, x_2, ..., x_n$, tj. ako su parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ svi konstantnog znaka na domenu funkcije, koristeći metodu granica možemo izračunati tačnu procjenu greške približne vrijednosti funkcije. Naime, kako je $f_{min} < f < f_{max}$, za jednu aproksimaciju funkcije f možemo uzeti aritmetičku sredinu $f^* = \frac{f_{min}+f_{max}}{2}$, pa je apsolutna greška aproksimacije funkcije

$$\Delta f^* = |f - f^*| \leq \frac{1}{2}(f_{max} - f_{min}).$$

Ukoliko funkcija f nije monotona po svim promjenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$, koristimo približne (ali veoma dobre) ocjene greške.

Stvarna greška približne funkcije f^*:

$$\begin{aligned}
y - y^* &= f - f^* \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \\
&= f(x_1^* + \Delta x_1^*, x_2^* + \Delta x_2^*, \ldots, x_n^* + \Delta x_n^*) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \\
&\overset{Taylor}{=} |[f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + \tfrac{1}{1!}(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1^* + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2^* + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n^*) + \ldots] \\
&\quad - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)| \\
&\approx \tfrac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1^* + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2^* + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n^* \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i^*.
\end{aligned}$$

Apsolutna greška približne funkcije f^* :

$$\begin{aligned}
\Delta y^* &= \Delta f^* \\
&= |f - f^*| \\
&\approx |\tfrac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1^* + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2^* + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n^*| \\
&\leq |\tfrac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1^*| + |\tfrac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2^*| + \cdots + |\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n^*| \\
&= |\tfrac{\partial f}{\partial x_1}|\Delta x_1^* + |\tfrac{\partial f}{\partial x_2}|\Delta x_2^* + \cdots + |\tfrac{\partial f}{\partial x_n}|\Delta x_n^* \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n |\tfrac{\partial f}{\partial x_i}|\Delta x_i^*.
\end{aligned}$$

INVERZNI PROBLEM OCJENE GREŠKE

S kojom tačnošću moramo uzeti vrijednosti nezavisnih varijabli posmatrane funkcije, tako da njezina vrijednost bude u granicama unaprijed zadane tačnosti? Preciznije, kolike moraju biti granice apsolutnih grešaka nezavisnih varijabli da granica apsolutne greške funkcije ne bi bila veća od unaprijed zadatog broja, tj. tako da

$$\Delta f^* \approx \sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}|\Delta x_i^* \leq \varepsilon?$$

Kako imamo n nepoznatih $\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \ldots, \Delta x_n^*$, a samo jedan uslov, potrebno su dodatne pretpostavke, a najčešće su to pretpostavka o jednakosti aposlutnih grešaka ili pretpostavka o jednakim doprinosima.

Princip jednakih apsolutnih grešaka (ako su veličine $x_1, x_2, \ldots, x_n$ istorodne): Pretpostavljamo, kao što i sam naziv principa govori, da vrijedi $\Delta x_1^* = \Delta x_2^* = \cdots = \Delta x_n^* = t$, pa onda imamo da

$$\Delta f^* = t \cdot \sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i^* \leq \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Princip jednakih doprinosa (ako su veličine $x_1, x_2, \ldots, x_n$ raznorodne): Pretpostavljamo, kao što i sam naziv principa govori, da vrijedi $|\frac{\partial f}{\partial x_1}|\Delta x_1^* = |\frac{\partial f}{\partial x_2}|\Delta x_2^* = \cdots = |\frac{\partial f}{\partial x_n}|\Delta x_n^* = \lambda$, pa onda imamo da

$$\Delta f^* = n\lambda \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i^* \leq \frac{\varepsilon}{n|\frac{\partial f}{\partial x_i}|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

DZ I: R. Scitovski (str. 13, 14, 15) - Zadaci 1.8, 1.9, 1.10, 1.12, 1.13, 1.17.

II INTERPOLACIJA I APROKSIMACIJA FUNKCIJA POLINOMIMA

Često za neku funkciju $y = f(x)$ nemamo analitički izraz, ali poznajemo njenu vrijednost u nekoliko tačaka (tzv. čvorovi interpolacije):

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y_i = f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_n)$

(Također, funkcija može biti data analitičkim izrazom koji je jako kompliciran, ali i tada možemo izračunati određen broj vrijednosti te funkcije, pa se ona i u tom slučaju može smatrati kao tablično zadana funkcija.) Cilj je aproksimirati funkciju f nekom jednostavnijom funkcijom g (obično polinomom, racionalnom funkcijom ili sl.), tako da bude $g(x_i) = f(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, a taj problem određivanja funkcije g naziva se interpolacija funkcije f. Kada odredimo funkciju g, onda možemo i procijeniti vrijednosti funkcije f u nekoj tački x $(x \neq x_i)$ tako da stavimo $f(x) \approx g(x)$.

Na osnovu Weierstrassovog teorema, za svaku neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji polinom $P(x)$ takav da za sve $x \in [a, b]$ vrijedi $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, tj. svaku neprekidnu funkciju moguće je dovoljno dobro (sa unaprijed zadatom tačnošću) aproksimirati polinomom. Dakle, treba odrediti interpolacioni polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

koji zadovoljava sljedeće uslove

$$\begin{array}{rcl}
P_n(x_0) = f(x_0) & \Leftrightarrow & a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\
P_n(x_1) = f(x_1) & \Leftrightarrow & a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\
\vdots & & \\
P_n(x_n) = f(x_n) & \Leftrightarrow & a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n).
\end{array}$$

Navedeni $(n+1) \times (n+1)$ sistem linearnih algebarskih jednačina sa nepoznatim $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ima jedinstveno rješenje. Dakle, interpolacioni polinom postoji i jedinstven je, ali postoji mnogo formi zapisivanja tog polinoma. Svaka od tih formi nosi poseban naziv, pa imamo: Lagrangeov interpolacioni polinom, I i II Newtonov interpolacioni polinom, I i II Gaussov interpolacioni polinom, Hermiteov interpolacioni polinom, itd; svaki od njih ima izvjesne pogodnosti u numeričkom smislu u nekim situacijama.

PROCJENA GREŠKE INTERPOLACIJE

Posebno je značajno pitanje ocjene greške takve aproksimacije. Uz pomoć Rolleove teoreme iz matematičke analize može se pokazati da za svaku funkciju $f \in \mathcal{C}^{n+1}[x_0, x_n]$ i za svaki $x \in [x_0, x_n]$ postoji $\varepsilon \in (x_0, x_n)$, tako da je

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |f(x) - P_n(x)| \\ &= |\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_n)| \\ &\leq \frac{\max_{x\in[x_0,x_n]}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_n)|. \end{aligned}$$

Lako se uočavaju dva bitna nedostatka dobijene formule: Nekada je funkcija $f(x)$ zadata tablično, pa nije moguće naći $f^{(n+1)}(x)$, ili se zna analitički izraz za funkciju $f(x)$, ali je veoma komplikovan, pa je nalaženje izvoda takvih funkcija mukotrpan a često praktično i nemoguć posao, naročito za veliko n. U oba slučaja je stoga (praktično) nemoguće procijeniti grešku $R_n(x)$. Dakle, dobijena formula za grešku ima teorijsku vrednost, a praktičnu vrijednost ona dobija tek nalaženjem jednostavnije ocene izvoda $f^{(n+1)}(x)$ za $x \in [x_0, x_n]$. Principom matematičke indukcije može se pokazati da za ekvidistantne čvorove interpolacije, pri čemu je korak interpolacije $x_{i+1} - x_i = h$, vrijedi

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n},$$

gdje su Δ^i konačne razlike koje definiramo na sljedeći način.

Konačne razlike prvog reda funkcije $y = f(x)$ su

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ &\vdots \\ \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

konačne razlike drugog reda funkcije $y = f(x)$ su

$$\begin{array}{rcl} \Delta^2 y_0 & = & \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 & = & \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ & \vdots & \\ \Delta^2 y_i & = & \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ & \vdots & \end{array}$$

konačne razlike k-tog reda funkcije $y = f(x)$ su

$$\begin{array}{l} \Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0 \\ \Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1 \\ \vdots \\ \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i. \\ \vdots \end{array}$$

Konačne razlike pogodno je smjestiti u tablicu:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\dots$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\dots$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Kod primjena tablica konačnih razlika bitno je da one budu korektne. Neka su vrijednosti $y_i = f(x_i)$ izračunate s tačnostima ε_i, tj. neka je gornja granica apsolutne greške tih vrijednosti jednaka $\varepsilon = \max_{i \in 0,1,\dots,n} \varepsilon_i = \frac{1}{2} 10^{-k}$. Ako se dogodi da je bar za neki i

$$|\Delta^m y_i| < 2^m \cdot \frac{1}{2} 10^{-k},$$

tj. ako je bar neka izračunata konačna razlika m–tog reda manja od maksimalno moguće greške te razlike, onda su tablice konačnih razlika od razlika tog reda pa dalje nekorektne.

Dakle, za približnu procjenu greške možemo uzeti

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{(n+1)} f(x)}{h^{n+1}(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Iz navedene formule za grešku interpolacije možemo uočiti da greška zavisi od čvorova interpolacije, te je korisno znati kako izabrati čvorove interpolacije (ako je to moguće, tj. ako je funkcija zadana analitički) kako bi greška bila minimalna. Dokazano je da je za čvorove interpolacije najbolje uzeti nule Čebišovljevih polinoma, definiranih na sljedeći način:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ &\vdots \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

LAGRANEGOEV INTERPOLACIONI POLINOM

Lagrangeov interpolacioni polinom traži se u obliku polinoma $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i)$, jednostavno dobijajući (objasniti):

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\dots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x_i-x_n)} \cdot f(x_i).$$

I NEWTONOV INTERPOLACIONI POLINOM

I Newtonov interpolacioni polinom (pogodan za koristiti u početku tablice, tj. oko tačke $x = x_0$) traži se u obliku polinoma $NI_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})$:

$$\begin{array}{lllll} NI_n(x_0) = y_0 & \Leftrightarrow & c_0 = y_0 & & \\ NI_n(x_1) = y_1 & \Leftrightarrow & c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 & \Leftrightarrow & c_1 = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h} \\ \quad\vdots & & & & \\ NI_n(x_n) = y_n & \Leftrightarrow & \dots & \Leftrightarrow & c_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! h}. \end{array},$$

dobijajući stoga da je

$$\begin{aligned} NI_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

II NEWTONOV INTERPOLACIONI POLINOM

II Newtonov interpolacioni polinom (pogodan za koristiti na kraju tablice, tj. oko tačke $x = x_n$) traži se u obliku polinoma $NI_n(x) = d_0 + d_1(x - x_n) + d_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + d_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_1)$. Analogno izvođenju I Newtonovog polinoma, dobijamo

$$\begin{aligned} NII_n(x) &= y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ &+ \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_1). \end{aligned}$$

HERMITEOV INTERPOLACIONI POLINOM

Hermiteov interpolacioni polinom koristi se kada su pored vrijednosti $y_i = f(x_i)$ poznate i vrijednosti $y_i' = f'(x_i)$ (ili u općem slučaju i neki izvodi višeg reda) (ili je funkcija data analitički, pa možemo izračunati navedene vrijednosti i izvode). Neka je $f \in \mathcal{C}^{(2n+2)}[x_0, x_n]$ i

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$y_i = f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$
$y_i' = f'(x_i)$	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	...	$f'(x_n)$

Kako imamo $2n + 2$ uslova, tražiti ćemo polinom

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Nepoznate koeficijente $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ određujemo metodom neodređenih koeficijenata, tj. rješavajući sljedeći $(2n + 2) \times (2n + 2)$ sistem linearnih algebarskih jednačina nekom od poznatih metoda:

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x_0) = f(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^{2n+2} = f(x_0) \\ H_{2n+1}(x_1) = f(x_1) \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^{2n+2} = f(x_1) \\ &\vdots \\ H_{2n+1}(x_n) = f(x_n) \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^{2n+2} = f(x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_{2n+1}(x_0) = f'(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 + 2a_2 x_0 + \cdots + (2n + 2) a_n x_0^{2n+1} = f'(x_0) \\ H'_{2n+1}(x_1) = f'(x_1) \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 + 2a_2 x_1 + \cdots + (2n + 2) a_n x_1^{2n+1} = f'(x_1) \\ &\vdots \\ H'_{2n+1}(x_n) = f'(x_n) \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 + 2a_2 x_n + \cdots + (2n + 2) a_n x_n^{2n+1} = f'(x_n) \end{aligned}$$

SPLINE INTERPOLACIJA

Ukoliko je broj čvorova interpolacije veliki, greška može biti znatna, a i polinomi visokog reda neupotrebljivi su u primjenama. Jedan od načina da to izbjegnemo jeste da pronađemo interpolacione polinome nižeg reda na pododsječcima odsječka interpolacije $[x_0, x_n]$. Spline m-tog reda funkcije f je funkcija

$$S_m(f,x) = \begin{cases} P_{1m}(x) = a_{10} + a_{11}x + \cdots + a_{1m}x^m, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ P_{2m}(x) = a_{20} + a_{21}x + \cdots + a_{2m}x^m, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \\ P_{nm}(x) = a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{nm}x^m, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases},$$

koja se poklapa sa funkcijom f u svim čvorovima interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i koja je glatka do određenog reda, tj. takva da se izvodi do $(m-1)-$og reda odgovarajućih polinoma poklapaju u središnjim čvorovima interpolacije $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}:$

$$P_{im}(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad P_{im}(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$P_{im}^{(k)}(x_i) = P_{i+1}^{(k)}(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1, \ k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Nepoznate koeficijente a_{ij} određujemo iz datog sistema linearnih algebarskih jednačina nekom od poznatih metoda. Međutim, ukoliko je broj jednačina u tom sistemu jednačina manji od broja nepoznatih koeficijenta, potrebno je postaviti određene dodatne uslove (npr. da krivina grafika u krajnjim čvorovima bude jednaka nuli, tj. da $P_{1m}^{(m-1)}(x_0) = P_{nm}^{(m-1)}(x_n) = 0$).

INVERZNA INTERPOLACIJA

Postupak nalaženja argumenta x koji odgovara zadatoj vrednosti y funkcije $y = f(x)$, koja nije data u tablici, naziva se inverzna ili obratna interpolacija. Ukoliko funkcija f ima inverznu funkciju (tj. ukoliko je bijektivna, što možemo svesti na ispitivanje injektivnosti funkcije, koju najčešće zaključujemo na osnovu monotonosti te funkcije), onda je moguće "obrnuti" tabelu i nastaviti interpolaciju na neki od gore navedenih načina. Primjetite da se inverzna interpolacija može primeniti za rešavanje jednačine $f(x) = 0$, izvodeći inverznu interpolaciju za $y = 0$.

METODA NAJMANJIH KVADRATA

Kao što je ranije spomenuto, ukoliko je broj čvorova veliki, greška interpolacije može biti znatna, a i polinomi visokog reda neupotrebljivi su u primjenama. U tom slučaju možemo se odlučiti funkciju aproksimirati nekim od polinoma nižeg reda (najčešće linearnom, kvadratnom ili kubnom funkcijom, posebice ako je eksperimentalno zaključeno da posmatrana funkcija ima jedan od navedenih oblika zavisnosti), ali tako da se vrijednost aproksimativne funkcije g ne poklapa nužno sa datom funkcijom f u datim tačkama (što je uvijek zadatak interpolacije), već samo zahtijevamo da su funkcije dovoljno blizu. Neka dakle funkciju f želimo aproksimirati polinomom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Ne zahtijevamo da se funkcija g kojom aproksimiramo funkciju f poklapa sa vrijednostima u čvorovima, ali tražimo da "rasipanje" mjerenih tačaka oko funkcije aproksimacije bude što manje. Posmatramo odstupanja $P(x_i) - y_i$. Međutim, posmatrati odstupanja u ovom obliku ne bi bilo dobro jer za neke tačke bi ta veličina bila pozitivna, a za druge negativna pa bi se moglo dogoditi da zbir tih grešaka bude nula, što najčešće nije slučaj. Stoga bismo kao mjeru greške za pojedine tačke mogli posmatrati apsolutne greške $|P(x_i) - y_i|$, jer nas u suštini ne zanima da li je greška veća ili manja od mjerene vrijednosti. Međutim, obzirom da tražimo da greška bude minimalna, funkcija (tj. greška) mora biti diferencijabilna, a $|P(x_i) - y_i|$ to nije. Dakle, posmatrati ćemo grešku

$$G = \sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2.$$

Potreban uslov za postojanje minimuma je ove funkcije je:

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial G}{\partial a_n} = 0.$$

Dakle, koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ određujemo iz navedenog $(n+1) \times (n+1)$ sistema linearnih algebarskih jednačina kojeg rješavamo nekom od poznatih metoda. Poznato nam je da taj sistem ima jedinstveno rješenje koje predstavlja stacionarnu tačku funkcije G, ali s obzirom na oblik funkcije G (zbir kvadrata), ta će stacionarna tačka očito biti tačka minimuma.

DZ II: R. Scitovski (str. 33, 34, 35, 36) - Zadaci 2.5, 2.6 (c), 2.7, 2.9, 2.11, 2.19, 2.20.

III RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNAČINA

Mnogi problemi u inženjerstvu i nauci zahtijevaju pronalaženje rješenja neke nelinearne jednačine; to je jedan od najstarijih problema u matematici. Za datu neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ treba naći $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $f(x) = 0$. Osim za neke najjednostavnije funkcije f (poput linearne ili kvadratne) nisu nam poznate metode za pronalaženje tačnog rješenja ove jednačine, pa su stoga numeričke metode koje nam omogućavaju pronalaženje približnog rješenja s unaprijed zadanom tačnošću od velikog značaja.

U postupku rješavanja nelinearnih jednačina možemo razlikovati dvije faze, i to

(1) lokalizacija rješenja (određivanje dovoljno malog segmenta koje sadrži jeddno rješenje)

(2) izračunavanje približnog rješenja sa zadatom tačnošću nekom od iterativnih metoda.

LOKALIZACIJA RJEŠENJA

Iz matematičke analize poznato je da, ukoliko je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, i $f(a) \cdot f(b) < 0$, postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = 0$. Dalje, jasno je da, ukoliko je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, $f(a)\cdot f(b) < 0$, i postoji $f'(x)$ $(x \in (a, b))$ i konstantnog je znaka (tj. funkcija f je monotona), onda postoji tačno jedan $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = 0$.

Lokalizacija rješenja je, dakle, postupak kojim se izoluju sva rješenja posmatrane jednačine u različitim intervalima, koristeći navedene rezultate, kao i pojedine druge metode, poput osnovnog teorema algebre, grafike elementarnih funkcija i sl.

Prema teoremu o srednjoj vrijednosti, jednostavno slijedi da je opća formula za ocjenu greške približnog rješenja x^*

$$|x^* - x| \leq \frac{|f(x^*)|}{\min_{x\in[a,b]} |f'(x)|}.$$

METODA BISEKCIJE (METODA POLOVLJENJA SEGMENTA)

Neka je $[a, b]$ interval u kojem se nalazi neko rješenje jednačine $f(x) = 0$, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ideja ove metode sastoji se u sužavanju ovog intervala $[a, b]$ u kojem se nalazi rješenje. Raspolovimo segment $[a, b] = [a_0, b_0]$ na dva podsegmenta $[a, x_1]$ i $[x_1, b]$, pri čemu je $x_1 = \frac{a+b}{2}$, te ispitujemo u kojem od segemenata se nalazi rješenje x. Ukoliko je $f(x_1) = f(\frac{a+b}{2}) = 0$, onda je $x = \frac{a+b}{2}$. U suprotnom, vrijedi ili $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ što znači da je $x \in [a, x_1] = [a_1, b_1]$, ili $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ što znači da je $x \in [x_1, b] = [a_1, b_1]$. U prvom slučaju nastavljamo sa polovljenjem segmenta $[a, x_1]$, u drugom slučaju nastavljamo sa polovljenjem segmenta $[x_1, b]$. Ponavljamo postupak do željene tačnosti.

Naime, ovim postupokom dobijamo niz segmenata

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \ldots,$$

za koje vrijedi $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, tj. koji sadrže rješenje jednačine $f(x) = 0$, a aproksimacije rješenja x su redom

$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Kako je $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$, ocjena za grešku je

$$|x_n - x| < \frac{1}{2^{n+1}}(b - a),$$

stoga da bismo postigli željenu tačnost dovoljno je da vrijedi $\frac{1}{2^{n+1}}(b - a) \leq \varepsilon$. Iz ovog uslova moguće je, dakle, unaprijed odrediti broj n potrebnih iteracija.

Metoda bisekcije je veoma jednostavna i ima sigurnu konvergenciju, odnosno uvijek dovodi do približnog rješenja sa željenom tačnošću, ali je njena konvergencija jako spora.

NEWTONOVA METODA TANGENTE

Neka je $[a, b]$ interval u kojem se nalazi neko rješenje jednačine $f(x) = 0$, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Neka je dalje izabrana početna aproksimacija x_0. Ideja metode je aproksimirati funkciju f tangentom na graf funkcije f u tački $(x_0, f(x_0))$, i definirati novu aproksimaciju x_1 u tački gdje ta tangenta siječe $x-$osu. Postupak ponavljamo dok ne postignemo željenu tačnost.

Jednačina tangente u tački $(x_n, f(x_n))$ je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

pa slijedi da je formula za sljedeću aproksimaciju

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Kada ova metoda konvergira ka traženom rješenju? Ako je f neprekidna funkcija koja ima neprekidnu prvu i drugu derivaciju na segmentu $[a, b]$, ako postoji barem jedno rješenje na tom segmentu (tj. ako $f(a) \cdot f(b) < 0$), ako f' i f'' imaju stalni znak na segmentu $[a, b]$ (tj. ako je funkcija $f$opadajuća ili rastuća, i konveksna ili konkavna), iterativni proces $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ konvergirati će ka rješenju x, ako početna aproksimacija x_0 zadovoljava uslov $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (što znači da početnu vrijednost x_0 treba odabrati na "strmijem" dijelu grafa funkcije f).

Za ocjenu greške približnog rješenja x^* možemo koristiti opću formulu

$$|x^* - x| \leq \frac{|f(x^*)|}{\min_{x \in [a,b]} |f'(x)|}.$$

Newtonova metoda ne konvergira uvijek (potreban je niz navedenih uslova da bi metoda konvergirala), ali ako konvergira, ta je konvergencija mnogo brža od prethodnih metoda. Stoga je Newtonova metoda jedna od najpoznatijih i najefikasnijih metoda numeričke analize.

NEWTONOVA METODA SJEČICE

Neka je $[a, b]$ interval u kojem se nalazi neko rješenje jednačine $f(x) = 0$, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ako ne znamo derivaciju f' funkcije f, ako se ona teško računa ili ako je u nekoj iteraciji $f'(x_n) = 0$, onda je Newtonovu metodu teško ili nemoguće primjeniti, pa tu metodu možemo modificirati na različite načine kako bismo izbjegli nalaženje tog izvoda u svakom koraku iteracije. Naprimjer, jedna od modifikacija jeste uvijek u svakom koraku iteracije uvrštavati uvijek $f'(x_0)$ umjesto $f'(x_n)$. Ipak, verovatno najvažnija modifikacija je metoda sječice. Neka su izabrane početne aproksimacije x_0, x_1. Onda tangentu (odnosno, dalje i samu funkciju f) možemo aproksimirati sječicom kroz tačke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$, te definirati sljedeću aproksimaciju x_2 u tački gdje sječica siječe $x-$osu.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Jednačina sječice je

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n),$$

pa je formula za aproksimaciju

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Za ocjenu greške približnog rješenja x^* možemo koristiti opću formulu

$$|x^* - x| \leq \frac{|f(x^*)|}{\min_{x\in[a,b]} |f'(x)|}.$$

Konvergencija metode sječice mnogo je brža od konvergencije metode bisekcije ili metode proste iteracije, ali je sporija od Newtonove metode tangente.

METODA REGULA FALSI (METODA POGREŠNOG POLOŽAJA)

Neka je $[a, b]$ interval u kojem se nalazi neko rješenje jednačine $f(x) = 0$, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Metoda regula falsi predstavlja kombinaciju metode sječice i metode bisekcije, jer je ideja koristiti sječicu kako bi se aproksimirala vrijednost od $f(x)$, ali se uvažava i predznak od $f(x_n)$.
Naime, metoda bisekcije ima sigurnu konvergenciju, ali je vrlo spora. Regula falsi je prirodni pokušaj ubrzavanja metode bisekcije. Ideja ove metode jeste aproksimirati funkciju f pravom koja prolazi kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (stoga se često ova metoda naziva i metoda linearne interpolacije), a traženu tačku x aproksimiramo sa nulom te prave (koja sigurno postoji jer $f(a) \cdot f(b) < 0$), označimo je sa x_1. Jednačina prave kroz navedene tačke je

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

pa je formula za početnu aproksimaciju

$$x_1 = f(a) \cdot \frac{a - b}{f(a) - f(b)} + a.$$

Dalje, na isti način kao u metodi bijekcije, ispitujemo koji od intervala $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ sadrži rješenje jednačine, a zatim se postupak ponavlja. Dakle, postupak rješavanja metodom regula falsi vrlo je sličan rješavanju metodom bisekcije, s tom razlikom što se sljedeća aproksimacija ne dobije pukim računanjem srednje vrijednosti krajeva intervala, nego se dobija kao presjek sječica sa x-osom.

Za ocjenu greške približnog rješenja x^* možemo koristiti opću formulu

$$|x^* - x| \leq \frac{|f(x^*)|}{\min_{x\in[a,b]} |f'(x)|}.$$

Ova metoda također ima sigurnu konvergenciju, uz iste pretpostavke kao metoda bisekcije.

METODA PROSTE ITERACIJE (METODA FIKSNE TAČKE)

Neka je $[a, b]$ interval u kojem se nalazi neko rješenje jednačine $f(x) = 0$, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Primjetimo da su sve prethodne metode oblika $x_{n+1} = \phi(x_n)$, pri čemu funkcija ϕ u svakim od ovih metoda ima određeni oblik. Stoga je prirodno pitanje konstrukcije opće metode ovog oblika. Zapišimo jednačinu $f(x) = 0$ u njoj ekvivalentnom obliku $x = \phi(x)$, što je uvijek moguće, i to na više različitih načina. Npr. $x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = x^2 + x - a \Leftrightarrow x = a/x \Leftrightarrow x = 0.5(x + a/x)$. Dakle, nalaženje rješenja jednačine $f(x) = 0$ ekvivalentno je nalaženju fiksne tačke preslikavanja ϕ, pa otuda i drugi naziv za ovu metodu.

Početnu aproksimaciju x_0 biramo proizvoljno, a sljedeće aproksimacije dobijamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x_0) \\ x_2 &= \phi(x_1) \\ &\cdots \\ x_n &= \phi(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Kada ova metoda konvergira ka traženom rješenju? Ako je $\phi : [a, b] \to [a, b]$ neprekidno diferencijabilna funkcija i ako vrijedi

$$(\exists q \in [0, 1))(\forall x \in (a, b))(|\phi'(x)| \leq q),$$

tada iterativni postupak $x_n = \phi(x_{n-1})$ konvergira ka jedinstvenom rješenju jednačine $x = \phi(x)$ na segmentu $[a, b]$, neovisno od početne aproksimacije $x_0 \in [a, b]$. Dalje, vrijede sljedeće procjene greške

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

ili

$$|x_n - x| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|,$$

ali je moguće koristiti i opću formulu za procjenu greške.

Postoji još mnogo metoda za numeričko rješavanje jednačina, ali navede su svakako sve koje se najčešće primjenjuju. Međutim, jako često se ustvari kombiniraju dvije ili tri od navedenih metoda. Naprimjer, metodom bisekcije možemo doći do nekog približnog rješenja x_n, kojeg onda možemo uzeti za početnu aproksimaciju za Newtonovu metodu, i sl.

DZ III: R. Scitovski (str. 88, 89, 90, 91) - Zadaci 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.12, 4.16, 4.28, 4.29.

IV NUMERIČKO DIFERENCIRANJE I INTEGRACIJA

Diferenciranje i integracija su vrlo česti zadaci matematičke analize. Međutim, u mnogim praktičnim zadacima funkcija $y = f(x)$ je zadata tablično ili je analitički izraz $f(x)$ jako komplikovan, pa je nalaženje izvoda ili integrala nemoguće ili vrlo teško.

Jedan od načina za numeričko diferenciranje funkcije $f(x)$ jeste prvobitno interpolirati funkciju $f(x) \approx P_n(x)$ nekim od polinoma iz prethodnoh poglavlja, te izvod računati kao $f'(x) \approx P_n'(x)$, ali ovaj postupak može dovesti do velikih grešaka (kada?), jer mala odstupanja polinoma $P_n(x)$ od funkcije $f(x)$ ne implicira mala odstupanja polinoma $P_n'(x)$ od izvoda $f'(x)$. Jedna od boljih alternativa jeste koristiti definiciju izvoda

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - h},$$

te izvod funkcije u tački računati na sljedeći način

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - h},$$

pri čemu je h jako mali broj. Ukoliko je funkcija zadana analitički, h možemo odabrati proizvoljno (mali), a ukoliko je funkcija zadana tablično, za h možemo izabrati korak interpolacije, pa

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Međutim, za bilo koju funkciju f mi možemo tačno izračunati njen izvod, što nije slučaj za integriranje, pa je taj problem mnogo zanimljiviji.

Pored toga što funkcija f može biti zadata tablično ili je analitički izraz $f(x)$ jako komplikovan, postoji mnoštvo primjera funkcija koje se čine jednostavnim, ali čiji integral nije moguće tačno izračunati, te su stoga numeričke metode integriranja od velikog značaja. Moguće je konstruisati različite formule za približno računanje integrala, a najčešće se one dobijaju aproksimirajući podintegralnu funkciju nekim od interpolacionih polinoma iz prethodnog poglavlja $f(x) \approx P_n(x)$, te dalje integrirajući dobijeni polinom. Primjenjujući ovaj postupak na bilo kojem od polinoma iz prethodnog poglavlja dobijamo iste formule (tzv. Newton-Cotesove formule), te je dovoljno da ih izvedemo za samo neki od njih, naprimjer Lagrangeov interpolacioni polinom $f(x) \approx L_n(x)$.

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx \\
&\approx \int_a^b L_n(x)dx \\
&= \int_a^b (\sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i))dx \\
&= \sum_{i=0} f(x_i) \int_a^b p_i(x)dx \\
&= \sum_{i=0} f(x_i) \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\dots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots(x_i-x_n)}dx
\end{aligned}
$$

Ukoliko su čvorovi interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ekvidistantni, $h = \frac{b-a}{n}$, iz gore navedene jednakosti za različite vrednosti n dobijaju se različite Newton-Cotesove formule, a neke od njih zbog specifičnog značenja nose i posebne nazive:

n	Ime / Formula $I^* \approx I = \int_a^b f(x)dx$	Greška
1	Trapezna formula $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$	$R = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi) = -\frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$
2	Sipmsonova 1/3 formula $\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$	$R = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$
3	Sipmsonova 3/8 formula $\frac{b-a}{8}[f(a)+3f(\frac{2a+b}{2})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)]$	$R = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) = -\frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$,

pri čemu je $\xi \in [a, b]$. Kako vrijednost ξ nije poznata, grešku računamo ograničavajući odgovarajući izvod odozgo. Tako naprimjer grešku pri računanju integrala koristeći trapezno pravilo računamo na sljedeći način

$$|R| = |-\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|.$$

Iz formula za grešku očito je da greška bitno ovisi od dužine intervala $[a, b]$. Stoga je nekad potrebno podijeliti interval $[a, b]$ na određeni broj podintervala i na njima primjenjivati navedene osnovne formule, kako bi se dobila što bolja (zadana) tačnost. Pri takvoj podjeli, trapezna formula primjenjuje sa na jedan, Simpsonova 1/3 na dva, a Sipmsonova 3/8 na tri susjedna podintervala.

DZ IV: R. Scitovski (str. 134, 135, 136) - Zadaci 7.4, 7.5, 7.6, 7.8, 7.10.