UVOD U FUNKCIONALNU ANALIZU
(Vježbe 2009/10)

Renata Turkeš

5. siječnja 2011.

Sadržaj

1 Metrički prostori **1**

1.1 Metrika i metrički prostori 1

1.2 Konvergencija u metričkim prostorima 33

1.3 Kompletnost metričkih prostora 35

1.4 Banachov stav o fiksnoj tački 66

1.5 Separabilnost metričkih prostora 85

1.6 Kompaktnost metričkih prostora 95

1.6.1 Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima 108

2 Banachovi prostori **111**

2.1 Linearni vektorski prostori 111

2.2 Normirani prostori 112

3 Linearni operatori **125**

3.1 Ograničenost i neprekidnost 125

3.2 Inverzni operator 146

3.3 O još dva principa 151

3.4 Zatvoreni operator 151

4 Linearni funkcionali **153**

4.1 Geometrijski smisao linearnih funkcionala 166

4.2 Hahn-Banachov teorem 166

4.3 Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala 170

4.4 Konjugovani prostori 172

4.5 Slaba konvergencija 175

5 Hilbertovi prostori **178**

5.1 Skalarni proizvod. Hilbertovi prostori. 178

5.2 Ortogonalnost i ortogonalni komplement 190

5.3 Ortonormirani sistemi 193

Uradjeni zadaci u sljedećem materijalu u potpunosti prate skriptu "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)", autor dr.sci. Nermin Okičić, docent, te su tako podijeljeni u identična poglavlja i sekcije kao u navedenoj skripti. Materijal je, dakle, najprije namijenjen studentima Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, na kursu Realna analiza. Vježbe su prvenstveno usmjerene ka što boljem razumijevanju osnovnih pojmova u navedenim cjelinama, te su zadaci pažljivo birani u skladu sa tim ciljem. Studentima koji će koristiti ove vježbe izričito se preporučuje da prvobitno samostalno pokušaju uraditi sve zadatke, prije osvrta na izložena rješenja.

Čujem, i zaboravim;
Vidim, i zapamtim;
Uradim, i razumijem.
(Azijska poslovica)

Preporučuje se da se vježbe čitaju po datom redoslijedu, jer se često navode različite napomene, primjedbe i detaljna objašnjenja nekih zaključaka, koja se kasnije podrazumijevaju i izostavljaju. Dokazi svih izloženih teorema nalaze se u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)". Literatura korištena u izboru najvećeg broja zadataka je sljedeća:

1. N. Okičić, *Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)*

2. S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*

3. C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis*

4. C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Problems in Real Analysis*

5. Efe A. Ok, *Real Analysis with Economic Applications*,

kao i vježbe na kursu Realna analiza kod asistentice Mirele Garić, te raniji ispitni rokovi. Rješenja istih u najvećem broju rad su autorice ovih vježbi, kao i sve greške u materijalu.

Na kraju je neophodno napomenuti da su do sada objavljeni dijelovi ove skripte ̌inili njenu prvobitnu, radnu i nepregledanu verziju, koja je samim time sadržavala mnoštvo grešaka. Mnoge greške su ispravljene, a veliki dio njih zahvaljujući raznim uputama i primejdbama od strane studentana, kojima se ovdje zahvaljujem.

Poglavlje 1

Metrički prostori

Rješavanje zadataka iz ovog poglavlja studentima bi trebalo u potpunosti razjasniti pojam metrike, te pojmove kompletnost, separabilnost i kompaktnost, i njihov medjusobni odnos, te dati uvid u značaj Banachovog stava o fiksnoj tački, prvenstveno kroz kvalitetno razumijevanje uslova tog teorema, a zatim i kroz primjenu istog na dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja različitih tipova (sistema) jednačina, te konvergencije nizova.

1.1 Metrika i metrički prostori

Metrika je jedan od najvažnijih pojmova moderne matematike. Mnogi pojmovi vezani za odredjeni skup (medju njima najvažniji je pojam konvergencije niza tačaka) zasnivaju se isključivo na rastojanju izmedju dvije tačke, a nezavisni su od drugih osobina tog skupa. Definicija rastojanja u odredjenom prostoru omogućava nam razmatranje mnogih pojmova vezanih za taj skup, poput npr. pojma kompletnosti, kompaktnosti ili neprekidnosti (koji se svi oslanjaju na pojam konvergencije), koje smo ranije sretali u skupu realnih brojeva.

Definicija 1.1.1 (METRIKA) *Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika na X, ako zadovoljava sljedeća četiri uslova:*

(M1) $(\forall x, y \in X): \quad d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

(M3) $(\forall x, y \in X): \quad d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $(\forall x, y, z \in X): \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Tada uredjeni par (X, d) nazivamo metrički prostor.

Primjedba 1.1.1 *U literaturi se nekad osobina (M1) navodi kao*

$$(\forall x, y \in X): \quad 0 \leq d(x, y) < \infty.$$

Zaista, primjetimo da je u gornjoj definiciji metrike navedeno da je preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$, odnosno da je d realna funkcija, tj. da nikada ne uzima vrijednost ∞. Stoga trebamo biti oprezni, i uvijek prvobitno provjeriti da li zadata funkcija uzima samo konačne vrijednosti, ukoliko to nije unaprijed navedeno.

Prvo ćemo navesti neke konkretne primjere metričkih prostora. Da bi dokazali da je odredjena funkcija metrika, uvijek ćemo pristupiti na isti način: provjeriti ćemo da li je zadata funkcija realna, a zatim provjeravamo i aksiome (M1)-(M4) iz same definicije metrike. Najčešće je jednostavno pokazati da su zadovoljene osobine (M1)-(M3), dok dokazivanje osobine (M4) može predstavljati nešto ozbiljniji zadatak. Tada su nam često od velikog značaja sljedeće teoreme:

Teorem 1.1.1 (NEJEDNAKOST HÖLDERA) *Neka su $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) $(i = 1, 2, ..., n)$, i neka je za realan broj $p > 1$, broj q definiran sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 1.1.2 (NEJEDNAKOST MINKOWSKOG) *Neka su $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) $(i = 1, 2, ..., n)$, i neka je $p \geq 1$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Kao što je navedeno i u skripti, obje ove nejednakosti imaju i svoj integralni oblik, tj. vrijede i sljedeće nejednakosti

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}},$$

$$(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

U sljedećim zadacima navedeni su uglavnom metrički prostori koji će se redovno spominjati tokom cijelog kursa Realna analiza.

ZADATAK 1.1.1 *Neka je X proizvoljan skup i neka je d funkcija definirana na sljedeći način:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Dokazati da je d metrika.

Rješenje: Jasno je, na osnovu same definicije preslikavanja d, da je $d(x,y) < \infty$ uvijek.

(M1) Kako $d(x,y)$ uzima samo vrijednosti 0 i 1, očito je $d(x,y) \geq 0$ uvijek zadovoljeno.

(M2) Neka $d(x,y) = 0$. Po definiciji preslikavanja d, tada $x = y$. S druge strane, ako je $x = y$ ponovno na osnovu same definicije slijedi $d(x,y) = 0$. Dakle, zadovoljena je i druga aksioma metrike.

(M3) Ako je $x = y$, onda je i $y = x$, pa $d(x,y) = d(y,x) = 0$. Analogno, ako $x \neq y$ tada i $y \neq x$, pa $d(x,y) = d(y,x) = 1$.

(M4) Ako je $x = y$, onda je $d(x,y) = 0$ pa sigurno vrijedi nejednakost trougla jer je desna strana nejednakosti uvijek nenegativna zbog (M1). Ako je $x \neq y$, tada $d(x,y) = 1$. Proizvoljan $z \in X$ tada sigurno ne može istovremeno biti jednak i x i y, pa je barem jedna od vrijednosti $d(x,z)$ ili $d(z,y)$ jednaka 1. Dakle, $d(x,z) + d(z,y) \geq 1$, pa je zadovoljena i nejednakost trougla.

Prostor (X,d) sa ovako definiranom metrikom nazivamo diskretni metrički prostor. Zbog svoje specifičnosti (a opet i jednostavnosti), često nam predstavlja koristan kontraprimjer, ili odmah pruža uvid u neke moguće "situacije" za koje bi inače često intuitivno zaključivali da (ne) vrijede u svim metričkim prostorima, iako to nije slučaj. ▲

ZADATAK 1.1.2 *Neka je $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Dokazati da je d metrika.

Rješenje: Već je u samoj postavci zadatka navedeno da je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, te odmah možemo prijeći na dokazivanje aksioma metrike.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Druga aksioma jasno slijedi iz sljedećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \ &\Leftrightarrow |x - y| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(M3) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} & |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| \\ \Leftrightarrow\ & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}, d)$ je dobro poznati Euklidov prostor realne prave. ▲

ZADATAK 1.1.3 *Dokazati da su sljedeće funkcije metrike na $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$:*

a. $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

b. $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

c. $d_\infty(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

Rješenje: Napomenimo prvobitno da su sve funkcije realne jer se radi o konačnim sumama, odnosno maksimumu konačno mnogo vrijednosti.

a.(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Druga aksioma jasno slijedi iz sljedećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} d_2(x,y)=0 &\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}}=0\\ &\Leftrightarrow x_i-y_i=0 \quad (\forall i\in\overline{1,n})\\ &\Leftrightarrow x_i=y_i \quad (\forall i\in\overline{1,n})\\ &\Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

(M3) $d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2)^{\frac{1}{2}}=d(y,x)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}}\\ &\overset{*}{\leq} (\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$,
pri čemu (*) označava primjenu nejednakosti Minkowskog na $a_i=x_i-z_i, b_i=z_i-y_i$.

Ovako definirana metrika na $\mathbb{R}^n$ naziva se Euklidska metrika. Ukoliko nije drugačije naglašeno, podrazumijevamo da je na metričkom prostoru $\mathbb{R}^n(n\in\mathbb{N})$ definirana upravo Euklidska metrika d_2.

b. Potpuno analogno kao a. Primjetimo da je a. ustvari poseban slučaj slučaja b.

c.(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Druga aksioma jasno slijedi iz sljedećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)=0 &\Leftrightarrow \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|=0\\ &\overset{(M1)}{\Leftrightarrow} |x_i-y_i|=0 \quad (\forall i\in\overline{1,n})\\ &\Leftrightarrow x_i=y_i \quad (\forall i\in\overline{1,n})\\ &\Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

(M3) $d(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|=\max_{1\leq i\leq n}|y_i-x_i|=d(y,x)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$|x_i - y_i| = |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$$

pa tako vrijedi i

$$\begin{aligned} \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| &\leq \max_{1\leq i\leq n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + \max_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i| \end{aligned},$$

što je ekvivalentno sa $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

▲

Primjedba 1.1.2 *Kako su ustvari definirane metrike* d_p $(1 \leq p \leq \infty)$ *iz prethodnog zadatka ako je* $n = 1$, *tj. na skupu realnih brojeva* $\mathbb{R}$? *Elementi* $x, y \in \mathbb{R}$ *su tačke koje imaju samo jednu koordinatu, pa lako uočavamo da se ustvari sve metrike* d_p *svode na našu dobro poznatu Euklidovu metriku realne prave iz ranijeg primjera, tj.*

$$d_p(x, y) = d_2(x, y) = |x - y| \quad (\forall p, 1 \leq p \leq \infty).$$

ZADATAK 1.1.4 *Dokazati da sljedeća funkcija nije metrika na* $\mathbb{R}^n$: $(n \geq 2)$

$$d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p < 1)$$

Rješenje:[NUSRET OGRIĆ] Kako bi dokazali da d_p nije metrika za $p < 1$, dovoljno je pokazati da d_p nije realna funkcija, ili da nije zadovoljen neki od aksioma metrike (M1)-(M4). Posmatrati ćemo nekoliko slučajeva.

1^0 $p < 0$
Jasno je da u ovom slučaju d_p neće biti realna funkcija. Naprimjer, ukoliko imamo vektore x i y koji se poklapaju barem u nekoj i-toj koordinati, izraz $|x_i - y_i|^p$ nije konačan broj, pa tako ni $d_p(x, y)$.

2^0 $p = 0$
Sada broj $\frac{1}{p}$ nije konačan, pa je jasno da d_p ponovno nije realna funkcija.

3^0 $0 < p < 1$
Ovaj slučaj jedini nije trivijalan. Naime, jednostavno se provjerava da je d_p realna funkcija, kao i da zadovoljava aksiome metrike (M1)-(M3).

Provjera tih osobina je jednostavna, a ovdje je izostavljamo jer ustvari nije ni neophodna u ovom zadatku kako nam je dovoljno pokazati samo koja osobina nije zadovoljena. Navedeno nas upućuje na zaključak da nije zadovoljen aksiom (M4). Zaista, posmatrajmo sljedeće vektore:

$$x = (1, 0, 0, 0, ..., 0)$$
$$y = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$$
$$z = (0, 0, 0, 0, ..., 0)$$

Na osnovu definicije metrike d_p jednostavno nalazimo odgovarajuće udaljenosti:

$$d(x, y) = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$
$$d(x, z) = 1$$
$$d(z, y) = 1$$

Primjetimo da, kako je $0 < p < 1$, vrijedi

$$d(x, y) > d(x, z) + d(z, y),$$

pa nejednakost trougla nije zadovoljena. Dakle, i u posljednjem slučaju d_p zaista nije metrika.

▲

Zašto je u posljednjem zadatku $n \geq 2$?

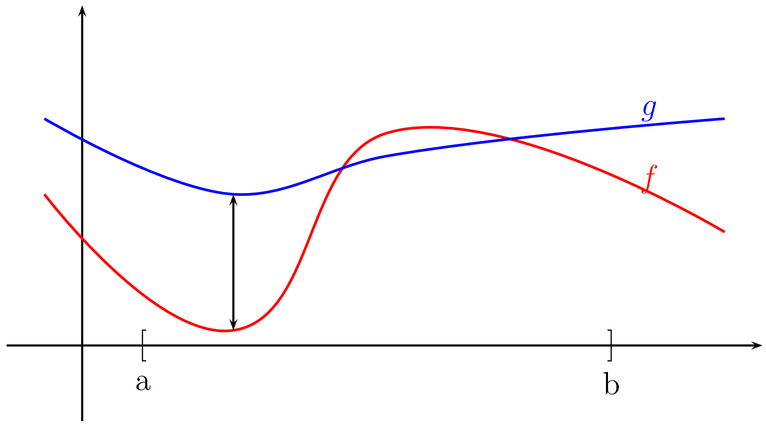
ZADATAK 1.1.5 *Dokazati da su sljedeće funkcije metrike na $\mathcal{C}[a, b]$ ($\mathcal{C}[a, b]$ je skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a, b]$):*

a. $d(f, g) = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$

b. $d(f, g) = (\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$

Rješenje:

a. Kako su po pretpostavci zadatka $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, f i g su neprekidne funkcije na $[a, b]$, pa je i funkcija $f - g$, a dalje i funkcija $|f - g|$ neprekidna na $[a, b]$. Iz Matematičke analize I poznato nam je da je $[a, b]$ kompaktan skup, te da neprekidna funkcija na kompaktnom skupu dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrijednost (detaljnije o ovoj temi govoriti ćemo u Sekciji 1.6.1). Stoga, funkcija $|f - g|$ dostiže svoju maksimalnu vrijednost na $[a, b]$, odnosno $\sup_{a \leq t \leq b} |f'(t) - g'(t)| = d(f, g)$ postoji i konačan je.



(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Osobina (M2) je takodjer zadovoljena jer

$$\begin{aligned} d(f, g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| = 0 \\ &\Leftrightarrow |f(t) - g(t)| = 0 \quad (\forall t \in [a, b]) \\ &\Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad (\forall t \in [a, b]) \\ &\Leftrightarrow f = g \end{aligned}$$

(M3) $d(f, g) = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| = \sup_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)| = d(g, f)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer za proizvoljne funkcije $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &= |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| \\ &\leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| &\leq \sup_{a \leq t \leq b} (|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|) \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| + \sup_{a \leq t \leq b} |g(t) - h(t)|, \end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Inače, ovako definirana metrika d je uobičajena metrika na $\mathcal{C}[a, b]$, pa ukoliko nije drugačije naglašeno, metrički prostor $\mathcal{C}[a, b]$ podrazumijeva upravo tu metriku.

b. Kako su po pretpostavci zadatka $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, f i g su neprekidne funkcije na $[a,b]$, pa je i funkcija $f-g$, a dalje i funkcija $|f-g|^2$ neprekidna na $[a,b]$. Iz Matematičke analize I poznato nam je da je svaka neprekidna funkcija integrabilna, pa stoga $\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt$ postoji i konačan je. Dakle, d je zaista realna funkcija.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Osobina (M2) je takodjer zadovoljena jer

$$\begin{aligned} d(f,g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \Big(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |f(t)-g(t)| = 0 \quad (\forall t \in [a,b]) \\ &\Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad (\forall t \in [a,b]) \\ &\Leftrightarrow f = g \end{aligned}$$

(M3) $d(f,g) = \Big(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_a^b |g(t)-f(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} = d(g,f)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena na osnovu nejednakosti Minkowskog (integralni oblik, $p=2$).
Ovako definirana metrika na $\mathcal{C}[a,b]$ naziva se kvadratnom.

▲

ZADATAK 1.1.6 *Da li je* $d(f,g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)-g(t)|$ *metrika na* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

Rješenje: Ne. Na osnovu prethodnog zadatka, jasno je da se ništa neće mijenjati u dokazu aksioma metrike, pa one vrijede. Ipak, ovako definirana funkcija na $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R})$ nije realna. Naime, neka je naprimjer $f(t) = t$ i $g(t) = 0$. Tada $d(f,g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)-g(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t| = \infty$. ▲

ZADATAK 1.1.7 *Provjeriti da li je* ρ *metrika na* $\mathcal{C}^1[0,1]$, *ako je definirana na sljedeći način:*

$$\rho(f,g) = \max_{0\le x\le 1} |f'(x) - g'(x)|$$

Rješenje: Posmatranjem zadatog preslikavanja ρ, brzo možemo očiti da ρ ne zadovoljava osobinu $(M2)$, pa samim time nije metrika. Naime, primjetimo:

$$\begin{aligned}\rho(f,g)=0 \quad &\Leftrightarrow \max_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)|=0\\ &\Leftrightarrow (\forall x\in[0,1]): \quad |f'(x)-g'(x)|=0\\ &\Leftrightarrow (\forall x\in[0,1]): \quad f'(x)=g'(x)\\ &\not\Rightarrow (\forall x\in[0,1]): \quad f(x)=g(x),\end{aligned}$$

jer ne postoji razlog zbog kojeg bi dvije neprkidne funkcije koje imaju jednake izvode bile i same jednake. Naprimjer, posmatramo li neprekidne funkcije

$$\begin{aligned}&f:[0,1]\to\mathbb{R}, \quad f(x)=C_1,\\ &g:[0,1]\to\mathbb{R}, \quad g(x)=C_2, \quad (C_1\neq C_2)\end{aligned}$$

jasno je da $f'(x)=g'(x)=0$ za sve $x\in[0,1]$, pa tako i

$$\rho(f,g)=\max_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)|=0,$$

a očito je da $f\neq g$. Zbog vježbe ipak ćemo provjeriti da li su zadovoljene ostale osobine iz definicije metrike. Kako su po pretpostavci zadatka $f,g\in\mathcal{C}^1[0,1]$, f' i g' su neprekidne funkcije na $[0,1]$, pa je i funkcija $f'-g'$, a dalje i funkcija $|f'-g'|$ neprekidna na $[0,1]$. Iz Matematičke analize I poznato nam je da je $[0,1]$ kompaktan skup, te da neprekidna funkcija na kompaktnom skupu dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrijednost (detaljnije o ovoj temi govoriti ćemo u Sekciji 1.6.1). Stoga, funkcija $|f'-g'|$ dostiže svoju maksimalnu vrijednost na $[0,1]$, odnosno $\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)|=\rho(f,g)$ postoji i konačan je.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Već smo pokazali da $\rho(f,g)=0$ ne implicira $f=g$. Ipak, trivijalno uočavamo da vrijedi obrat, tj. da

$$f=g \quad\Rightarrow\quad \rho(f,g)=0.$$

(M3) $\rho(f,g)=\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)|=\max\limits_{0\le x\le 1}|g'(x)-f'(x)|=\rho(g,f)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer za proizvoljne funkcije $f,g,h\in\mathcal{C}^1[0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}|f'(x)-g'(x)| &= |f'(x)-h'(x)+h'(x)-g'(x)|\\ &\le |f'(x)-h'(x)|+|h'(x)-g'(x)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \max_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)| &\le \max_{0\le x\le 1}(|f'(x)-h'(x)|+|h'(x)-g'(x)|)\\ &\le \max_{0\le x\le 1}|f'(x)-g'(x)|+\max_{0\le x\le 1}|g'(x)-h'(x)|,\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa $\rho(f,g)\le\rho(f,h)+\rho(h,g)$.

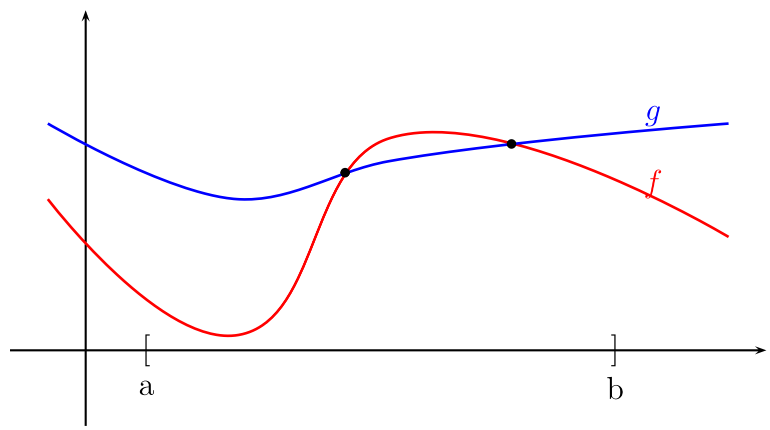
Dakle, ρ zadovoljava sve osobine metrike osim dijela aksiome (M2), odnosno osim uslova

$$\rho(f,g) \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

Inače, takvi prostori se nazivaju pseudometrički. ▲

ZADATAK 1.1.8 *Da li je* $d(f,g) = \inf_{a\le t\le b} |f(t) - g(t)|$ *metrika na* $\mathcal{C}[a,b]$?

Rješenje: Ne. Kao i u prethodnom zadatku, ovako definirana funkcija d je pseudometrika. Naime, jasno je da možemo izabrati dvije različite funkcije f i g, ali da vrijedi $d(f,g) = 0$.



Dakle, ne vrijedi $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$. Zaista,

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \inf_{a\le t\le b} |f(t) - g(t)| = 0,$$

no nema razloga da navedeno dalje povlači jednakost funkcija f i g.
Da vrijede sve ostale osobine metrike lako je pokazati, a isto se može zaključiti i osvrćući se na primjer uobičajene metrike na $\mathcal{C}[a,b]$ - sve što smo zaključili za supremum, analogno bi mogli zaključiti i za infimum. ▲

ZADATAK 1.1.9 *Dokazati da je (X, d) metrički prostor ako je*

a. *$X = c$ skup svih konvergentnih nizova; $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ za $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$*

b. *$X = c_0$ skup svih nula nizova (nizovi koji konvergiraju nuli); $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ za $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$*

c. *$X = l_p$ skup svih nizova sumabilnih sa stepenom p $(1 \le p < \infty)$, tj. $l_p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$; $d(x, y) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ za $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$*

d. *$X = l_\infty$ skup svih ograničenih nizova, tj. $l_\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$; $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ za $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$*

Rješenje:

a. Kako je poznato iz Matematičke analize I (a detaljnije u sekciji 1.3), svaki konvergentan niz je ograničen, pa su prozivoljni nizovi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničeni. Tada je jasno i niz $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, pa je zaista $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| < \infty$. Pokažimo da su zadovoljeni i svi aksiomi metrike.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Osobina (M2) je takodjer zadovoljena jer

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_n - y_n| = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow x_n = y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(M3) $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| = d(y, x)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer za proizvoljne nizove $x, y, z \in$

c vrijedi

$$
\begin{aligned}
|x_n - y_n| &= |x_n - z_n + z_n - y_n| \\
&\leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \\
\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - z_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - y_n|,
\end{aligned}
$$

što je ekvivalentno sa $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

b. Potpuno analogno kao pod a. Štaviše, možemo reći da b. slijedi zbog a., jer je $c_0 \subset c$.

c. Na osnovu nejednakosti Minkowskog imamo

$$
\begin{aligned}
d(x,y) = (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\underset{x,y\in l_p}{<} \infty + \infty = \infty,
\end{aligned}
$$

tj. d je zaista realna funkcija.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Druga aksioma jasno slijedi iz sljedećeg niza ekvivalencija

$$
\begin{aligned}
d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_n - y_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow x_n = y_y \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow x = y
\end{aligned}
$$

(M3) $d(x,y) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n - x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = d(y,x)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$
\begin{aligned}
(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_y|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - z_n + z_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{*}{\leq} (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - z_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{\mathbb{N}} |z_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,
pri čemu (*) označava primjenu nejednakosti Minkowskog na $a_n = x_n - z_n, b_n = z_n - y_n$.

d. Da je (l_∞, d) metrički prostor možemo zaključiti na osnovu a., jer u dokazivanju svih osobina metrike u slučaju a. ustvari koristimo samo osobinu ograničenosti nizova. Naravno, ukoliko bismo direktno željeli pokazati te osobine, učinili bi to potpuno analogno kao pod a.

▲

ZADATAK 1.1.10 *Dokazati da je $(L_p[a,b], d)$ metrički prostor, gdje je $L_p[a,b]$ skup Lebesgue integrabilnih funkcija sa p-tim stepenom $(1 \le p < \infty)$ nad segmentom $[a,b]$, i $d(f,g) = (\int_a^b |f(t)-g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$.*

Rješenje: Sve funkcije $f, g \in L_p[a,b]$ su Lebesgue integrabilne na $[a,b]$, pa zaista $d(f,g) = (\int_a^b |f(t)-g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$ uvijek.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Osobina (M2) je takodjer zadovoljena jer

$$\begin{aligned} d(f,g) = 0 \quad & \Leftrightarrow (\int_a^b |f(t)-g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ & \Leftrightarrow |f(t)-g(t)| = 0 \quad (\forall t \in [a,b]) \\ & \Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad (\forall t \in [a,b]) \\ & \Leftrightarrow f = g \end{aligned}$$

(M3) $d(f,g) = (\int_a^b |f(t)-g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = (\int_a^b |g(t)-f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = d(g,f)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena na osnovu nejednakosti Minkowskog (integralni oblik).

▲

ZADATAK 1.1.11 *Provjeriti da li su d_1 i d_2 metrike na $\mathbb{R}$, ako su definirane na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = & \quad |\tfrac{x}{1+|x|} - \tfrac{y}{1+|y|}| \\ d_2(x,y) = & \quad |\arctan x - \arctan y| \end{aligned}$$

Rješenje: Provjerimo prvobitno da je li je d_1 metrika na $\mathbb{R}$. Da d_1 uzima samo konačne vrijednosti jasno je iz sljedećeg:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |\tfrac{x}{1+|x|} - \tfrac{y}{1+|y|}| \\ &\leq |\tfrac{x}{1+|x|}| + |\tfrac{y}{1+|y|}| \\ &= \tfrac{x}{1+|x|} + \tfrac{y}{1+|y|} \\ &< 1+1=2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Provjerimo sada aksiome metrike:

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2)

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 &\Leftrightarrow |\tfrac{x}{1+|x|} - \tfrac{y}{1+|y|}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{x}{1+|x|} = \tfrac{y}{1+|y|} \\ &\Leftrightarrow x + x|y| = y + |x|y \end{aligned}$$

1^0 $x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 &\Leftrightarrow x+xy=y+xy \\ &\Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

2^0 $x \leq 0, y \leq 0$

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 &\Leftrightarrow x-xy=y-xy \\ &\Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

3^0 $x > 0, y < 0$

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 &\Leftrightarrow x-xy=y+xy \\ &\Leftrightarrow x=y+2xy, \end{aligned}$$

što je nemoguće jer je lijeva strana jednakosti pozitivna, a desna negativna. Dakle, sigurno nikada neće vrijediti $d_1(x,y)=0$ ako $x>0, y<0$.

4^0 $x < 0, y > 0$

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 &\Leftrightarrow x+xy=y-xy \\ &\Leftrightarrow x+2xy=y, \end{aligned}$$

što je ponovno nemoguće jer je lijeva strana jednakosti negativna, a desna pozitivna.

Stoga, zaista vrijedi $d_1(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

(M3) $d_1(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}| = |\frac{y}{1+|y|} - \frac{x}{1+|x|}| = d_1(y,x)$

(M4) Konačno, nejednakost trougla je zadovoljena za sve $x,y,z \in X$ jer

$$\begin{aligned} |\tfrac{x}{1+|x|} - \tfrac{y}{1+|y|}| &= |\tfrac{x}{1+|x|} - \tfrac{z}{1+|z|} + \tfrac{z}{1+|z|} - \tfrac{y}{1+|y|}| \\ &\leq |\tfrac{x}{1+|x|} - \tfrac{z}{1+|z|}| + |\tfrac{z}{1+|z|} - \tfrac{y}{1+|y|}| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$.

Na osnovu (M1)-(M4) zaključujemo da preslikavanje d_1 jeste metrika na $\mathbb{R}$. Ispitajmo da li je i d_2 metrika. Kako funkcija $\arctan x$ uzima vrijednosti u intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, onda

$$d_2(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \leq |\arctan x| + |\arctan y| < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi < \infty.$$

Sada prelazimo na ispitivanje aksioma metrike.

(M1) Jasno slijedi iz definicije.

(M2) Kako je funkcija $\arctan x$ dobro definirana i injektivna, imamo

$$\begin{aligned} d_2(x,y) = 0 &\Leftrightarrow |\arctan x - \arctan y| = 0 \\ &\Leftrightarrow \arctan x = \arctan y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(M3) $d_2(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = |\arctan y - \arctan x| = d_2(y,x)$

(M4) Nejednakost trougla je zadovoljena za sve $x,y,z \in X$ jer

$$\begin{aligned} |\arctan x - \arctan y| &= |\arctan x - \arctan z + \arctan z - \arctan y| \\ &\leq |\arctan x - \arctan z| + |\arctan z - \arctan y| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$.

Dakle, i preslikavanje d_2 je metrika na $\mathbb{R}$. ▲

ZADATAK 1.1.12 *Neka je (X,d) metrički prostor. Neka je $D : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje definirano sa*

$$D(x,y) = \ln(1 + d(x,y)).$$

Dokazati da je D metrika.

Rješenje:

(M1) d je metrika na X, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} & (\forall x, y \in X): && d(x,y) \geq 0 \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y \in X): && 1 + d(x,y) \geq 1 \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y \in X): && \ln[1 + d(x,y)] \geq \ln 1 \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y \in X): && D(x,y) \geq 0 \end{aligned}$$

(M2) Kako je d metrika, vrijedi $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned} D(x,y) = 0 & \Leftrightarrow \ln[1 + d(x,y)] = 0 = \ln 1 \\ & \Leftrightarrow 1 + d(x,y) = 1 \\ & \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(M3) Kako je d metrika, vrijedi $d(x,y) = d(y,x)$, pa tako vrijedi i:

$$D(x,y) = \ln[1 + d(x,y)] = \ln[1 + d(y,x)] = D(y,x).$$

(M4) Naravno, i u dokazivanju nejednakosti trougla za funkciju D koristiti ćemo činjenicu da je d metrika, odnosno da d zadovoljava nejednakost trougla:

$$\begin{aligned} & (\forall x, y, z \in X): && d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y, z \in X): && 1 + d(x,y) \leq 1 + d(x,z) + d(z,y) \\ \overset{(M1)}{\Rightarrow}\ & (\forall x, y, z \in X): && 1 + d(x,y) \leq 1 + d(x,z) + d(z,y) + d(x,z)d(z,y) \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y, z \in X): && 1 + d(x,y) \leq [1 + d(x,z)][1 + d(z,y)] \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y, z \in X): && \ln[1 + d(x,y)] \leq \ln[1 + d(x,z)][1 + d(z,y)] \\ \Rightarrow\ & (\forall x, y, z \in X): && \ln[1 + d(x,y)] \leq \ln[1 + d(x,z)] + \ln[1 + d(z,y)]. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost upravo je ekvivalentna nejednakosti $D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$.

▲

Sada ćemo dokazati neke osobine metrike koje se često koriste, a koje su u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)" uglavnom navedene u obliku lema bez dokaza.

ZADATAK 1.1.13 *Neka je (X, d) proizvoljan metrički prostor. Dokazati da vrijede sljedeće osobine:*

a. $(\forall x_1, x_2, ..., x_n \in X, n \geq 2): \quad d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n)$

b. $(\forall x, y, z \in X): \quad |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$

c. $(\forall x, y, z, t \in X): \quad |d(x, z) - d(y, t)| \leq d(x, y) + d(z, t)$

Rješenje:

a. Tvrdnju ćemo dokazati koristeći princip potpune matematičke indukcije.

1^0 Provjerimo tačnost tvrdnje za $n = 2$. Tvrdnja je tačna jer je d metrika, pa vrijedi nejednakost trougla.

2^0 Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $n = k, (k \geq 2)$ tj. neka za sve $x_1, x_2, ..., x_k \in X, (k \geq 2)$ vrijedi

$$d(x_1, x_k) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{k-1}, x_k).$$

3^0 Provjerimo tačnost tvrdnje za $n = k+1$. Neka su $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} \in X$ proizvoljni. Imamo:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_{k+1}) &\overset{(M4)}{\leq} d(x_1, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \\ &\overset{2^0}{\leq} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{k-1}, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \end{aligned}$$

Po principu potpune matematičke indukcije, sada možemo zaključiti da je tvrdnja tačna za sve $n \in \mathbb{N}$.

b. Neka su $x, y, z \in X$ proizvoljni. Primjetimo:

$$\begin{aligned} & |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \\ \Leftrightarrow \quad & -d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z) \\ \Leftrightarrow \quad & -d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z) \wedge d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z) \\ \Leftrightarrow \quad & d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \wedge d(x, y) \leq d(y, z) + d(x, z) \\ \overset{(M3)}{\Leftrightarrow} \quad & d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \wedge d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno aksiomu (M4).

c. Neka su $x, y, z, t \in X$ prozivoljni. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
|d(x,z) - d(y,t)| &= |d(x,z) - d(z,y) + d(z,y) - d(y,t)| \\
&\leq |d(x,z) - d(z,y)| + |d(z,y) - d(y,t)| \\
&\overset{(M3)}{=} |d(z,x) - d(z,y)| + |d(y,z) - d(y,t)| \\
&\overset{b.}{\leq} d(x,y) + d(z,t)
\end{aligned}$$

▲

Uraditi ćemo još nekoliko zanimljivijih zadataka koji imaju za cilj dodatno usavršiti razumijevanje definicije metrike, jer zahtijevaju kvalitetno shvatanje aksioma metrike (M1)-(M4).

ZADATAK 1.1.14 *Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ će funkcija $d(x,y) = |x-y|^\alpha$ biti metrika na $\mathbb{R}$?*

Rješenje: Radi lakšeg tumačenja, ispitivati ćemo funkciju d kroz nekoliko slučajeva, odnosno intervala u kojima se nalazi $\alpha \in \mathbb{R}$. Da bi dokazali da d neće biti metrika za odredjeni α dovoljno je uočiti da za takav α ne vrijedi neki od aksioma metrike, što možemo učiniti provjerom redom aksioma (M1)-(M4) ili direktnim uočavanjem koji aksiom nije zadovoljen.

1^0 $\alpha < 0$
d nije metrika jer ne vrijedi $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kako je $d(0,0) = \infty$.

2^0 $\alpha = 0$
d nije metrika jer ne vrijedi $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kako $d(0,0) = 0^0$ nije definirano.

3^0 $\alpha \in (0,1)$
Jednostavno se pokazuje da zaista vrijede aksiomi (M1)-(M3). Aksiom (M4) $(\forall x, y, z \in X): \quad |x-y|^\alpha \leq |x-z|^\alpha + |z-y|^\alpha$ je takodjer zadovoljen zbog činjenice

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad |a+b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha.$$

(za $a = x - z$, $b = z - y$) Da bi dokazali navedenu činjenicu, uvedimo pomoćnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = (1+t)^\alpha - (1+t^\alpha)$$

Ispitajmo monotonost navedene funkcije:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} \\ &= \alpha[(1+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] \\ &\overset{\alpha\in(0,1)}{<} 0 \end{aligned}$$

Dakle, f je opadajuća, a kako je $f(0) = 0$, onda imamo

$$\begin{aligned} & (\forall t \geq 0): \quad f(t) \leq 0 \\ \Rightarrow\ & (\forall t \geq 0): \quad (1+t)^\alpha - (1+t^\alpha) \leq 0 \\ \Rightarrow\ & (\forall t \geq 0): \quad (1+t)^\alpha \leq (1+t^\alpha) \end{aligned}$$

Uvrstimo li $t = \frac{a}{b}$, $(a, b > 0$, inače trivijalno $)$ dobijamo

$$\begin{aligned} & (1+\tfrac{a}{b})^\alpha \leq 1 + \tfrac{a^\alpha}{b^\alpha} \\ \Rightarrow\ & \tfrac{(b+a)^\alpha}{b^\alpha} \leq 1 + \tfrac{a^\alpha}{b^\alpha} \\ \Rightarrow\ & (a+b)^\alpha \leq b^\alpha + a^\alpha. \end{aligned}$$

4^0 $\alpha = 1$
$d(x,y) = |x-y|$ je standardna Euklidska metrika.

5^0 $\alpha > 1$
Jednostavno provjeravamo da vrijede aksiomi (M1)-(M3). Medjutim, aksiom (M4) nije zadovoljen jer vrijedi njegova negacija:

$$(\exists x = 1, y = -1, z = 0 \in \mathbb{R}): \quad 2^\alpha = |x-y|^\alpha \geq |x-z|^\alpha + |z-y|^\alpha = 2,$$

pa d nije metrika.

Konačno, zaključujemo da je funkcija $d(x,y) = |x-y|^\alpha$ metrika na $\mathbb{R}$ samo kada $\alpha \in (0,1]$. ▲

ZADATAK 1.1.15 *Odrediti sve realne brojeve a, b za koje je funkcija $d(x,y) = |ax+by|$ metrika na $\mathbb{R}$.*

Rješenje: Prvobitno napomenimo da će uvijek vrijediti $d(x,y) < \infty$, bez obzira na $a, b \in \mathbb{R}$.

(M1) Jasno je da $(\forall x, y \in \mathbb{R}): \quad 0 \leq |ax+by| = d(x,y)$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

(M2) Radi lakšeg tumačenja drugog aksioma metrike, posmatrati ćemo dvije implikacije koje ga čine odvojeno:

- $[x = y \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0]$
  $\Leftrightarrow [x = y \quad \Rightarrow \quad |ax + by| = 0]$
  $\Leftrightarrow [x = y \quad \Rightarrow \quad ax + by = 0]$
  $\Leftrightarrow [x = y \quad \Rightarrow \quad ax = -by]$,
  a da bi ta implikacija vrijedila jasno je da mora vrijediti $a = -b$.
- $[d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y]$
  $\Leftrightarrow [|ax - ay| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y]$
  $\Leftrightarrow [ax - ay = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y]$
  $\Leftrightarrow [ax = ay \quad \Rightarrow \quad x = y]$,
  a da bi navedena implikacija vrijedila jasno je da mora biti $a \neq 0$, jer
  $$0 \cdot x = 0 \cdot y \not\Rightarrow x = y.$$

Dakle, da bi vrijedio aksiom (M2): $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, neophodno je da vrijede obje implikacije koje čine ovu ekvivalenciju, pa mora vrijediti $a = -b$, ali pri tome ne smije vrijediti $a = -b = 0$. Stoga, $d(x,y) = |ax - ay|$, gdje je $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(M3) Aksiom (M3) neće nametnutni nikakva dodatna ograničenja na a, jer

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x,y) = |ax - ay| = |ay - ax| = d(y,x),$$

bez obzira na $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(M4) Ni (M4) neće nametnuti ograničenja jer za sve $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |ax - ay| \\ &= |ax - az + az - ay| \\ &\leq |ax - az| + |az - ay| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Na osnovu (M1)-(M4), jedini uslovi su $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, i $b = -a$. Dakle, $d(x,y) = |ax - ay|$ je metrika za sve $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. ▲

ZADATAK 1.1.16 *Neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija koja zadovoljava sljedeće osobine: strogost, simetričnost i nejednakost trougla, tj. zadovoljava aksiome metrike (M2)-(M4). Dokazati da je tada d metrika!*

Rješenje: Kako je po pretpostavci d realna funkcija, da bi dokazali da je d metrika dovoljno je utvrditi da je d i pozitivno definitna, tj. da zadovoljava aksiom (M1):

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x, y) \geq 0.$$

Pretpostavimo suprotno, neka postoje $a, b \in X$ takvi da $d(a, b) < 0$.
Na osnovu (M2) imamo $d(a, a) = 0$.
Na osnovu (M3) imamo $d(b, a) = d(a, b) < 0$.
Konačno, na osnovu (M4) imamo $d(a, a) \leq d(a, b) + d(b, a)$, što je kontradikcija jer je zbog ranije izloženog lijeva strana nejednakosti 0, a desna negativan broj. Dakle, zaista vrijedi i aksiom (M1), pa je d metrika. ▲

ZADATAK 1.1.17 *Neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija koja je zadovoljava sljedeće osobine:*

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $(\forall x, y, z \in X): \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Dokazati da je d metrika!

Rješenje: Da li su date osobine (i) i (ii) aksiomi metrike (M2) i (M4)? Ne, i to je prvo što je neophodno uočiti. Na taj zaključak navodi nas i prethodni zadatak, u kojemu imamo tvrdnju da aksiomi (M2)-(M4) povlače i aksiom (M1), što vodi do pretpostavke da slabiji uslovi ne bi implicirali istu tvrdnju. Takodjer, pogledamo li rješenje prethodnog zadatka, možemo uvidjeti da smo zaista koristili i aksiom (M3) kako bi dokazali da je d metrika.
Zaista, pogledamo li pažljivo, možemo se uvjeriti da uslov (ii) ne predstavlja nejednakost trougla u njenom izvornom obliku! Sada možemo prijeći na konkretno rješavanje zadatka. d je po pretpostavci realna funkcija, pa je dovoljno provjeriti aksiome metrike (M1)-(M4).

(M1) Na osnovu (ii) imamo

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y),$$

a kako je zbog (i) $d(x, x) = 0$, jasno je da vrijedi

$$(\forall x, y \in X): \quad 0 \leq 2d(x, y),$$

odnosno

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x, y) \geq 0.$$

(M2) Pretpostavka (i) ekvivalentna je aksiomu (M2).

(M3) Koristeći redom pretpostavke (ii) i (i) dobijamo

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x,y) \leq d(x,x) + d(y,x) = 0 + d(y,x) = d(y,x).$$

Analogno dobijamo

$$(\forall x, y \in X): \quad d(y,x) \leq d(y,y) + d(x,y) = 0 + d(x,y) = d(x,y).$$

Spajajući dvije dobijene nejednakosti imamo

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x,y) = d(y,x).$$

(M4) Po pretpostavci (ii) imamo

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z),$$

no zbog dokazanog aksioma (M3) vrijedi $d(y,z) = d(z,y)$, pa je zaista zadovoljen aksiom (M4):

$$(\forall x, y \in X): \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Kako su zadovoljene svi aksiomi metrike, d je metrika. ▲

ZADATAK 1.1.18 *Neka je (X,d) proizvoljan metrički prostor i $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ monotono neopadajuće preslikavanje koje zadovoljava sljedeće osobine:*

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

Ako je $g : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ definirano sa $g(x,y) = f(d(x,y))$, dokazati da je g metrika.

Rješenje: Po pretpostavci, g je realna funkcija, pa predjimo na dokazivanje aksioma metrike.

(M1) Po pretpostavci zadatka, $g : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$, za zaista vrijedi $g(x,y) \geq 0$ uvijek.

(M2) Osobina (M2) je zadovoljena jer vrijedi

$$\begin{aligned} g(x,y)=0 &\Leftrightarrow f(d(x,y))=0 \\ &\overset{(i)}{\Leftrightarrow} d(x,y)=0 \\ &\Leftrightarrow x=y, \end{aligned}$$

pri čemu je posljednja ekvivalencija zadovoljena jer je d metrika pa $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

(M3) Kako je d metrika, vrijedi $d(x,y)=d(y,x)$, pa imamo

$$g(x,y)=f(d(x,y))=f(d(y,x))=g(y,x).$$

(M4) Zbog činjenice da je d metrika, ona zadovoljava i nejednakost trougla, odnosno imamo

$$\begin{aligned} & d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y) \\ \overset{f \text{ neopadajuća}}{\Rightarrow} \quad & f(d(x,y)) \le f(d(x,z)+d(z,y)) \\ \overset{(ii)}{\Rightarrow} \quad & f(d(x,y)) \le f(d(x,z))+f(d(z,y)) \\ \Leftrightarrow \quad & g(x,y) \le g(x,z)+g(z,y) \end{aligned}$$

Dakle, g je zaista metrika. ▲

Pojam metrike omogućava nam mjerenje i nekih drugih rastojanja.

Definicija 1.1.2 (UDALJENOST SKUPOVA) *Neka je (X,d) proizvoljan metrički prostor, i $\emptyset \neq A,B \subseteq X$. Rastojanje izmedju skupova A i B definišemo sa*

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y): \quad x\in A, y\in B\}.$$

ZADATAK 1.1.19 *Naći udaljenost $d(A,B)$ $(A,B\subseteq \mathbb{R}^2)$, ako je:*

a. A osa Ox, a B prava čija je jednačina $y=1$.

b. A osa Ox, a B grafik funkcije $y=e^x$.

Rješenje: A i B su podskupovi skupa $\mathbb{R}^2$, pa kako drugačije nije naglašeno, prisjetimo se da ćemo ovdje podrazumijevati Euklidsku metriku d_2, tj. za $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ je

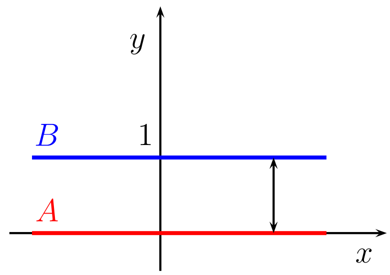
$$d(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}.$$

a. Na osnovu definicije udaljenosti dva skupa imamo

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{d(x,y): \quad x \in A, y \in B\} \\ &\overset{(*)}{=} \inf\{d((x_1,0),(y_1,1)): \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(0-1)^2}: \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{\sqrt{(x_1-y_1)^2+1}: \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &\overset{(**)}{=} 1, \end{aligned}$$

pri čemu $(*)$ i $(**)$ označavaju sljedeća jednostavna detaljna objašnjenja:

(*) $x \in A \Leftrightarrow x = (x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}$
$y \in B \Leftrightarrow y = (y_1, 1), y_1 \in \mathbb{R}$



(**) Na osnovu definicije infimuma znamo

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \sqrt{(a-b)^2+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i) & (\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad \sqrt{(a-b)^2+1} \geq 1 \\ (ii) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in \mathbb{R}^2): \quad \sqrt{(a_\varepsilon-b_\varepsilon)^2+1} < 1+\varepsilon \end{cases}$$

Jednostavno se pokazuje da zaista vrijede oba uslova iz definicije infimuma:

(i) $(\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad (a-b)^2 \geq 0$
$\Rightarrow (\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad (a-b)^2+1 \geq 1$
$\Rightarrow (\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad \sqrt{(a-b)^2+1} \geq 1$

(ii) Uočimo li sljedeći jednostavan niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_\varepsilon-b_\varepsilon)^2+1} < 1+\varepsilon \quad &\Leftrightarrow (a_\varepsilon-b_\varepsilon)^2+1 < 1+2\varepsilon+\varepsilon^2 \\ &\Leftrightarrow a_\varepsilon - b_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)} \\ &\Leftrightarrow a_\varepsilon < b_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

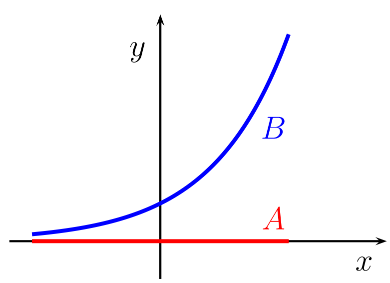
jasno je da zaista vrijedi (ii), pri čemu možemo birati $b_\varepsilon \in \mathbb{R}$ proizvoljan, i $a_\varepsilon \in [b_\varepsilon, b_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)})$.
(najjednostavnije $(\exists(a_\varepsilon, b_\varepsilon) = (c, c))$)

b. Ponovno na osnovu definicije udaljenosti dva skupa imamo

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{d(x,y): \quad x \in A, y \in B\} \\ &\overset{(\triangle)}{=} \inf\{d((x_1,0),(y_1,e^{y_1})): \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (0-e^{y_1})^2}: \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + e^{2y_1}}: \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}\} \\ &\overset{(\triangle\triangle)}{=} 0, \end{aligned}$$

pri čemu $(\triangle)$ i $(\triangle\triangle)$ označavaju sljedeća jednostavna detaljna objašnjenja:

$(\triangle)$ $x \in A \Leftrightarrow x = (x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}$
$y \in B \Leftrightarrow y = (y_1, e^{y_1}), y_1 \in \mathbb{R}$



$(\triangle\triangle)$ Po definiciji infimuma

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \sqrt{(a-b)^2 + e^{2b}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i) & (\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad \sqrt{(a-b)^2 + e^{2b}} \geq 0 \\ (ii) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in \mathbb{R}^2): \quad \sqrt{(a_\varepsilon - b_\varepsilon)^2 + e^{2b}} < \varepsilon \end{cases}$$

Slično prethodnom slučaju pokazujemo da su zadovoljena oba uslova iz definicije infimuma:

(i) $(\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad (a-b)^2 \geq 0, e^{2b} \geq 0$
$\Rightarrow (\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad (a-b)^2 + e^{2b} \geq 0$
$\Rightarrow (\forall a, b \in \mathbb{R}): \quad \sqrt{(a-b)^2 + e^{2b}} \geq 0$

(ii) Uočimo li niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}\sqrt{(a_\varepsilon - b_\varepsilon)^2 + e^{2b}} < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow (a_\varepsilon - b_\varepsilon)^2 + e^{2b_\varepsilon} < \varepsilon^2 \\ &\Leftrightarrow a_\varepsilon^2 - 2a_\varepsilon b_\varepsilon + b_\varepsilon^2 - e^{2b_\varepsilon} - \varepsilon^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow a_\varepsilon \in (b_\varepsilon - \sqrt{e^{2b_\varepsilon + \varepsilon^2}}, b_\varepsilon - \sqrt{e^{2b_\varepsilon + \varepsilon^2}}),\end{aligned}$$

lako zaključujemo da zaista vrijedi i uslov (ii) iz definicije infimuma, izaberemo li $b_\varepsilon \in \mathbb{R}$ prozivoljan, i $a_\varepsilon \in (b_\varepsilon - \sqrt{e^{2b_\varepsilon+\varepsilon^2}}, b_\varepsilon - \sqrt{e^{2b_\varepsilon+\varepsilon^2}})$.
($\sqrt{e^{2x}} < \varepsilon \Leftrightarrow e^x < \varepsilon \Leftrightarrow x < \ln \varepsilon$, pa se npr. jednostavno može uzeti $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) = (\ln \varepsilon - 1, \ln \varepsilon - 1)$))

▲

Na kraju ove sekcije podsjetimo se još definicije nekih pojmova čije nam uvodjenje takodjer omogućava pojam metrike.

Definicija 1.1.3 (OTVORENA/ZATVORENA KUGLA. SFERA.) *Neka je (X, d) metrički prostor, i $a \in X$ i $r > 0$ proizvoljni. Otvorena kugla u X sa centrom u tački a, poluprečnika r je skup*

$$B(a, r) = \{x \in X : \quad d(a, x) < r\}.$$

Zatvorena kugla u X sa centrom u tački a, poluprečnika r je skup

$$K(a, r) = \{x \in X : \quad d(a, x) \leq r\}.$$

Sfera u X sa centrom u tački u a, poluprečnika r je skup

$$S(a, r) = \{x \in X : \quad d(a, x) = r\}.$$

ZADATAK 1.1.20 *Šta su otvorene kugle u diskretnom metričkom prostoru (X, d)?*

Rješenje: Kako $d(x, y)$ uzima samo vrijednosti 0 i 1, jasno je da možemo imati samo sljedeća dva slučaja.

1^0 $r \in (0, 1]$
$B(a, r) = \{x \in X : \quad d(a, x) < r\} = a.$

2^0 $r \in (1, +\infty)$
$B(a, r) = \{x \in X : \quad d(a, x) < r\} = X.$

▲

ZADATAK 1.1.21 *Šta predstavlja otovorenu jediničnu kuglu $B(0,1)$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^2, d_p)$, ako je*

a. $p = 1$

b. $p = \frac{3}{2}$

c. $p = 2$

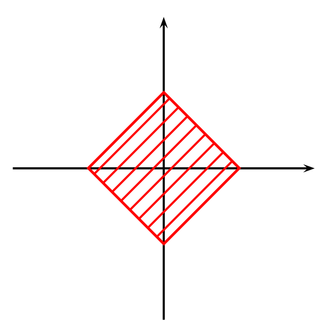
d. $p = 3$

e. $p = \infty$

Rješenje:

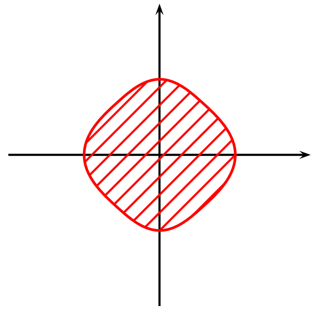
a. $p = 1$

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_1(0,x) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_1((0,0),(x_1,x_2)) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad |0 - x_1| + |0 - x_2| < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x_1| + |x_2| < 1\} \end{aligned}$$



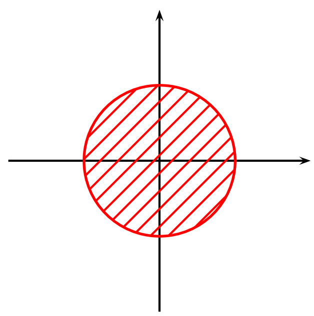
b. $p = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_{\frac{3}{2}}(0,x) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_{\frac{3}{2}}((0,0),(x_1,x_2)) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad (|0 - x_1|^{\frac{3}{2}} + |0 - x_2|^f rac32)^{\frac{2}{3}} < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x_1|^{\frac{3}{2}} + |x_2|^f rac32 < 1\} \end{aligned}$$



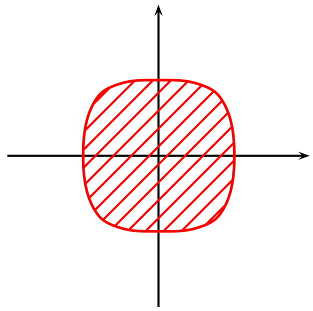
c. $p = 2$

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_2(0, x) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_2((0,0), (x_1, x_2)) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad (|0 - x_1|^2 + |0 - x_2|^2)^{\frac{1}{2}} < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\} \end{aligned}$$



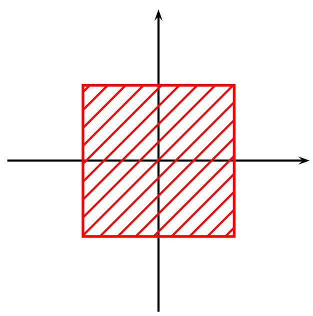
d. $p = 3$

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_3(0, x) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_3((0,0), (x_1, x_2)) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad (|0 - x_1|^3 + |0 - x_2|^3)^{\frac{1}{3}} < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x_1|^3 + |x_2|^3 < 1\} \end{aligned}$$



e. $p = \infty$

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_\infty(0, x) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad d_\infty((0,0),(x_1,x_2)) < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad \max\{|0 - x_1|, |0 - x_2|\} < 1\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} \end{aligned}$$



▲

ZADATAK 1.1.22 *Neka je $\mathcal{C}[0,1]$ metrički prostor sa uobičajenom metrikom.*

a. Šta predstavlja jediničnu kuglu $B(0,1)$?

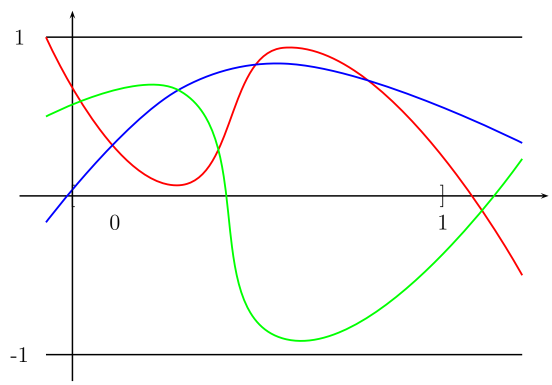
b. Neka je $f(t) = e^t$ i $g(t) = t$. Da li $g \in B(f,1)$?

Rješenje:

a. Kako je

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \quad d(0,f) < 1\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \quad \sup_{0\le t\le 1} |0 - f(t)| < 1\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \quad \sup_{0\le t\le 1} |f(t)| < 1\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \quad -1 < f(t) < 1\} \end{aligned},$$

kuglu $B(0,1)$ čine sve neprekidne funkcije na segmentu [0,1] koje se nalaze izmedju pravih $y = -1$ i $y = 1$.



b.

$$\begin{aligned} g \in B(f,1) &\Leftrightarrow (g \in \mathcal{C}[a,b] \wedge d(f,g) < 1) \\ &\Leftrightarrow (g \in \mathcal{C}[0,1] \wedge \sup_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)| < 1) \\ &\Leftrightarrow (t \in \mathcal{C}[0,1] \wedge \sup_{0\le t\le 1} |e^t - t| < 1), \end{aligned}$$

što ne vrijedi jer $\sup\limits_{0\le t\le 1} |e^t - t| \ge |e^0 - 0| = |1-0| = 1$. Dakle, $g \notin B(f,1)$.

▲

ZADATAK 1.1.23 *Neka je (X,d) metrički prostor. Dokazati da u općem slučaju ne mora vrijediti sljedeće:*

a. $B(x, r_1) = B(x, r_2) \Rightarrow r_1 = r_2$

b. $B(x_1, r) = B(x_2, r) \Rightarrow x_1 = x_2$

Rješenje:

a. Kako nalaženje primjera koji podupiru tvrdnju zadatka značajno doprinosi razumijevanju definicije kugli, navesti ćemo ih nekoliko:

1. Neka je X proizvoljan skup, a d diskretna metrika. Izaberemo li proizvoljan element $a \in X$, imamo
$$B(a,2) = B(a,3) = X.$$
S druge strane, jasno je da $2 \neq 3$, pa zaista $B(x,r_1) = B(x,r_2) \not\Rightarrow r_1 = r_2$.

2. Neka je $X = \{a,b\}$ i d proizvoljna metrika. Ako obilježimo $d(a,b) = u > 0$, imamo
$$B(a,u) = B(a,\frac{u}{2}) = \{a\},$$
iako $u \neq \frac{u}{2}$. Možemo naprimjer posmatrati i
$$B(a,2u) = B(a,3u) = a,b = X,$$
iako $2u \neq 3u$.

3. Neka je $X = \mathbb{Z}$, a d Euklidska metrika. Primjetimo da vrijedi
$$B(0,3) = B(0,2.5) = \{-2,-1,0,1,2\},$$
a jasno je da $3 \neq 2.5$.

b. Neka je X proizvoljan skup koji sadrži najmanje dva elementa (radi jednostavnosti možemo posmatrati skup $X = \{a,b\}$), i d diskretna metrika. Tada je jasno da vrijedi
$$B(a,2) = B(b,2) = X,$$
iako $a \neq b$.

▲

Definicija 1.1.4 (OTVOREN/ZATVOREN SKUP) *Neka je (X,d) metrički prostor. Skup $O \subseteq X$ je otvoren ako vrijedi*
$$(\forall x \in O)(\exists \varepsilon > 0): \quad B(x,\varepsilon) \subseteq O.$$
Skup $F \subseteq X$ je zatvoren ako je njegov komplement otvoren skup.

Definicija 1.1.5 (TAČKA NAGOMILAVANJA) *Neka je (X, d) metrički prostor, i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je tačka nagomilavanja skupa A ako se u svakoj okolini tačke x nalazi bar jedna tačka $a \in A, a \neq x$.*

U zadacima je često najjednostavnije utvrditi zatvorenost skupa A ispitivanjem da li A sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Naime, navedena osobina ekvivalentna je zatvorenosti skupa, u što se možemo uvjeriti jednostavnim zaključivanjem.

Definicija 1.1.6 (ZATVORENJE SKUPA) *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$ proizvoljan skup. Zatvorenje skupa A, u oznaci $\overline{A}$, je najmanji (u smislu inkluzije) zatvoreni skup koji sadrži skup A.*

Jednostavno se uočava da vrijedi

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X : \quad F \text{ zatvoren i } A \subseteq F\}.$$

Definicija 1.1.7 (BAZA) *Neka je (X, d) metrički prostor. Familija $\{B_i\}_{i \in I}$ otvorenih skupova je baza prostora X ako se svaki otvoren skup u X može prikazati kao unija nekih elemenata te familije.*

1.2 Konvergencija u metričkim prostorima

Definicija 1.2.1 (KONVERGENTAN NIZ) *Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u X kažemo da konvergira ka $x_0 \in X$ ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Drugačije rečeno, niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka $x_0 \in X$ ako $d(x_n, x_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Pišemo $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Primjetimo da se definicija konvergencije oslanja na metriku u datom prostoru, što je napomenuto u samom uvodnom dijelu ovog poglavlja. Tako, niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ može konvergirati u (X, d_1), ali ne konvergirati u (X, d_2).

Definicija 1.2.2 (NEPREKIDNA FUNKCIJA) *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) : \quad d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon,$$

odnosno ako

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Preslikavanje f je neprekidno na X ako je neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

ZADATAK 1.2.1 *Dokazati da je metrika neprekidna funkcija svojih argumenata.*

Rješenje: Na osnovu definicije neprekidnog preslikavanja, treba pokazati da vrijedi

$$\lim_{x_n \to x, y_n \to y} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

U tu svrhu, neka $x_n \to x$ i $y_n \to y$. Na osnovu jedne od ranije dokazanih osobina metrike, imamo

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0,$$

što i predstavlja tvrdnju zadatka. ▲

ZADATAK 1.2.2 *Niz tačaka u metričkom prostoru može konvergirati samo jednoj tački.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, neka niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru X konvergira ka dvije različite tačke a i b. Tada imamo

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0 \text{ kad } n \to \infty,$$

odnosno $a = b$, što je kontradikcija, pa vrijedi tvrdnja zadatka. ▲

ZADATAK 1.2.3 *Neka je (X, d) diskretan metrički prostor. Dokazati da vrijedi*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ je konvergentan} \quad \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{N}) : x_K = x_{K+1} = x_{K+2} = ...$$

Rješenje:

$\Rightarrow$) Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan konvergentan niz. Na osnovu definicije konvergencije, to znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Kako navedena relacija vrijedi za sve $\varepsilon > 0$, izaberimo npr. $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada vrijedi

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{1}{2},$$

a kako je d diskretna metrika, to ustvari znači

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) = 0.$$

Kako je d metrika, zadovoljava osobinu (M2), pa je posljednja relacija ekvivalentna sljedećoj

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x_0.$$

Dakle, $(\exists K = n_0): \quad x_K = x_{K+1} = x_{K+2} = ...$

$\Leftarrow$) Neka $(\exists K \in \mathbb{N}) : x_K = x_{K+1} = x_{K+2} = ...$ Dakle, zanemarimo li konačno mnogo članova niza, ostali se članovi niza poklapaju, pa je jasno da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Preciznije, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvegrentan jer zaista vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = K \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) = 0 < \varepsilon.$$

▲

ZADATAK 1.2.4 *Dokazati da je konstantan niz konvergentan u svakom metričkom prostoru.*

Rješenje: Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstantan niz, tj. neka

$$x_n = a \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

U svakom metričkom prostoru, d zadovoljava osobinu (M2) pa $d(a, a) = 0$, pa

$$d(x_n, a) = d(a, a) = 0 \leq \varepsilon \text{ za sve } \varepsilon > 0.$$

Potpuno precizno, imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = 1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) = 0 < \varepsilon,$$

odnosno $x_n \to a$. ▲

1.3 Kompletnost metričkih prostora

Definicija 1.3.1 (OGRANIČEN NIZ) *Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen ako sve članove niza možemo umetnuti u neku kuglu, tj. ako vrijedi*

$$(\exists a \in X, r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}): \quad x_n \in B(a, r).$$

Primjedba 1.3.1 *Ograničen niz možemo definirati i na drugačiji način - kažemo da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen ako vrijedi*

$$(\exists C > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(x_m, x_n) < C$$

Zaista, jednostavno se pokazuje ekvivalentnost navedenih definicija (preporučuje se studentima da ekvivalentnost pokušaju sami pokazati, koristeći definicije iz sekcije 1.1.!):

$\Rightarrow$) *Neka vrijedi* $(\exists a \in X, r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}): \quad x_n \in B(a, r)$.
Posmatrajmo proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$. *Vrijedi*

$$d(x_m, x_n) \overset{(M4)}{\leq} d(x_m, a) + d(a, x_n) \leq r + r = 2r,$$

pa zaista $(\exists C = 2r > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(x_m, x_n) < C$.

$\Leftarrow$) *Neka vrijedi* $(\exists C > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(x_m, x_n) < C$. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *proizvoljan. Uzmemo li npr.* $a = x_1 \in X$, *na osnovu pretpostavke imamo*

$$d(x_n, a) = d(x_n, x_1) < C \Leftrightarrow x_n \in B(a, r).$$

Dakle, zaista $(\exists a = x_1 \in X, r = C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}): \quad x_n \in B(a, r)$.

Naravno, u rješavanju zadataka ograničenost niza ćemo dokazivati $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *po definiciji koja nam je u tom trenutku prikladnija.*

Definicija 1.3.2 (CAUCHYEV NIZ) *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Za niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* X *kažemo da je Cauchyev ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Drugačije rečeno, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je Cauchyev ako* $d(x_m, x_n) \to 0 \quad (m, n \to \infty)$.

Prisjetimo se još jednom i definicije konvergentnog niza.

Definicija 1.3.3 (KONVERGENTAN NIZ) *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Za niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* X *kažemo da konvergira ka* $x_0 \in X$ *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Drugačije rečeno, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira ka* $x_0 \in X$ *ako* $d(x_n, x_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$. *Pišemo* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Teorem 1.3.1 *Svaki Cauchyev niz je ograničen, a svaki konvergentan niz je Cauchyev. Shematski to možemo zapisati*

$$\textit{konvergentan} \Rightarrow \textit{Cauchyev} \Rightarrow \textit{ograničen}$$

Primjedba 1.3.2 *Nerijetko nam je kontrapozicija nekog teorema i značajnija od samog teorema. Po kontrapoziciji posljednjeg teorema, ako niz nije ograničen onda sigurno nije ni Cauchyev; ako niz nije Cauchyev, sigurno znamo da nije ni konvergentan. Shematski to možemo zapisati*

$$\textit{nije ograničen} \Rightarrow \textit{nije Cauchyev} \Rightarrow \textit{nije konvergentan}$$

Želimo li, naprimjer, pokazati da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev, možemo to utvrditi pokazujući da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije ograničen, što je često mnogo lakši zadatak. Ili, ako želimo pokazati da odredjeni niz nije konvergentan, jasno je da je dovoljno da pokažemo da nije ograničen, ili da nije Cauchyev.

ZADATAK 1.3.1 *Provjeriti da li je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz metričkog prostora (X,d) (i) ograničen, (ii) Cauchyev, (iii) konvergentan, gdje je:*

a. $X = \mathbb{C}$, *d uobičajena metrika,* $a_n = e^{in}$

b. $X = \mathbb{R}$, *d uobičajena metrika,* $a_n = b_n c_n$, *pri čemu je* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ograničen, a* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyev niz*

c. $X = \mathcal{C}[0,1]$, $d(f(t),g(t)) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt$, $a_n(t) = \max\{\frac{t}{n}, 1\}$

Rješenje: U utvrdjivanju odredjenih svojstava datih nizova značajni će nam biti posljednji teorem i primjedba.

a. $(\mathbb{C}, d)$
$x, y \in \mathbb{C}$, pa su oblika

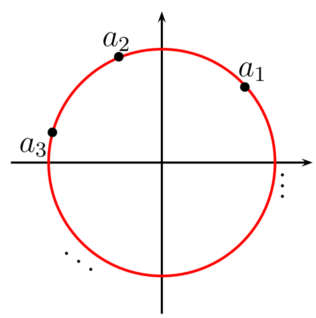
$$\begin{aligned} x &= x_1 + ix_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ y &= y_1 + iy_2, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$d(x,y) = |x-y| = |(x_1-y_1) + i(x_2-y_2)| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$
Navedimo sada nekoliko članova zadatog niza $a_n = e^{in}$, kako bi bolje uočili njegova svojstva. (Korisno je prvobitno pokušati intuitivno "osjetiti" da li zadati niz posjeduje odredjeno svojstvo, a tek onda strogo

pokušati isto dokazati.) Kako je $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, imamo

$$\begin{aligned}
&a_1 = e^i = \cos 1 + i \sin 1\\
&a_2 = e^{2i} = \cos 2 + i \sin 2\\
&\vdots\\
&a_n = e^{in} = \cos n + i \sin n\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$|e^{in}| = |\cos n + i \sin n| = \sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo da se članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nalaze na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravni:



Sada već možemo uočiti da je dati niz ograničen, ali da nije Cauchyev, pa tako nije ni konvergentan. Pokažimo to eksplicitno.

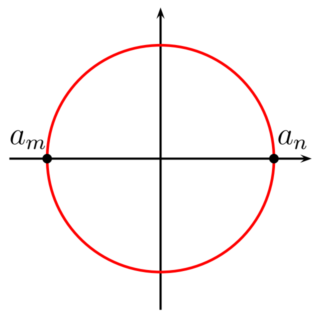
(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen $\Leftrightarrow (\exists C > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad 0 \leq d(a_m, a_n) \leq C$
Posmatrajmo stoga proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$, i bez umanjenja općenitosti pretpostavimo da $m > n$.

$$\begin{aligned}
d(a_m, a_n) &= |a_m - a_n|\\
&= |e^{im} - e^{in}|\\
&= |e^{in}(e^{i(m-n)} - 1)|\\
&= |e^{in}||e^{i(m-n)} - 1|\\
&= |e^{i(m-n)} - 1|\\
&\leq |e^{i(m-n)}| + |-1|\\
&= 1 + 1\\
&= 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\exists C = 2 > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(a_m, a_n) \leq C$
$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen
(Sve članove niza možemo smjestiti npr. u kuglu $B(0, \frac{3}{2})$)

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev
$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$
Navedeno ne vrijedi, jer npr. za

$$\begin{array}{ll} m = (2k+1)\pi & a_m = e^{im} = \cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi = -1 \\ n = 2k\pi & a_n = e^{in} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1 \end{array}$$



Kad $k \to \infty$, tada $m, n \to \infty$, ali

$$d(a_m, a_n) = |-1-1| = 2 \nrightarrow 0$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev niz.

(iii) Kako $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev niz (upravo dokazano), onda po posljednjoj primjedbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sigurno nije konvergentan.

b. $X = (\mathbb{R}, d)$
Prvobitno razjasnimo koja svojstva posjeduje zadati niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Po pretpostavci, $a_n = b_n c_n$, pri čemu je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz.

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen, pa sve članove niza možemo smjestiti u neku kuglu, a bez umanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to kugla sa centrom u 0, $tj.$

$$\begin{array}{ll} (\exists r_1 > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : & |b_n| < r_1, \text{ odnosno} \\ (\exists C_1 \geq 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}) : & |b_m - b_n| \leq C_1 \end{array}$$

(Prisjetite se dvije ekvivalentne definicije ograničenog niza!)

- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev, pa vrijedi

$$\begin{array}{lll} & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : & m, n \geq n_0 \Rightarrow d(c_m, c_n) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : & m, n \geq n_0 \Rightarrow |c_m - c_n| < \varepsilon \end{array}$$

Takodjer, kako je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev znamo da je ograničen, pa analogno kao i za prethodni niz imamo

$$\begin{aligned}&(\exists r_2 > 0)(\forall n \in \mathbb{N}): \quad |c_n| < r_2,\\ &(\exists C_2 \geq 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad |c_m - c_n| \leq C_2.\end{aligned}$$

Predjimo sada na ispitivanje osobina datog niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen $\Leftrightarrow (\exists C \geq 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(a_m, a_n) \leq C$
Posmatrajmo stoga proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$, i bez umanjenja općenitosti pretpostavimo da $m > n$.

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &= |a_m - a_n| \\ &= |b_m c_m - b_n c_n| \\ &= |b_m c_m - b_m c_n + b_m c_n - b_n c_n| \\ &= |b_m(c_m - c_n) + c_n(b_m - b_n)| \\ &\leq |b_m(c_m - c_n)| + |c_n(b_m - b_n)| \\ &= |b_m||c_m - c_n| + |c_n||b_m - b_n| \\ &< r_1 C_2 + r_2 C_1 \end{aligned}$$

tj. $(\exists C = r_1 C_2 + r_2 C_1 > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(a_m, a_n) \leq C$
Dakle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$
Pitamo se dakle da li $d(a_m, a_n) \to 0$ kad $m, n \to \infty$. Ranije je ustanovljeno da vrijedi

$$d(a_m, a_n) \leq |b_m||c_m - c_n| + |c_n||b_m - b_n|$$

Kako imamo $|b_m| < r_1$, i $|c_m - c_n| \to 0$ kad $m, n \to \infty$, vrijedi $|b_m||c_m - c_n| \to 0$ kad $m, n \to \infty$. Medjutim, iako $|b_m - b_n| \leq C_1$, primjetimo da $|c_n| \nrightarrow 0$ u općem slučaju. Navedeno nas navodi na zaključak da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev, u šta nas može uvjeriti sljedeći (kontra)primjer:

$$\begin{array}{lll} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} & b_n = (-1)^n & -1, 1, -1, 1, -1, 1, ... \\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} & c_n = 1 & 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... \end{array}$$

Za date nizove očigledno vrijedi da je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, jer $|b_n| \leq 1$ uvijek, i za $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da je Cauchyev jer $d(c_m, c_n) = 0$ uvijek. Ipak, niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n = b_n c_n = (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$$

očigledno nije Cauchyev. Naime, za $m = 2k, n = 2k + 1$ vrijedi $m, n \to \infty$ za $k \to \infty$, ali

$$d(a_m, a_n) = |a_m - a_n| = |(-1)^m - (-1)^n| = |1 - (-1)| = 2 \nrightarrow 0.$$

Dakle, u općem slučaju $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev niz, tj. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne mora biti Cauchyev niz.

(iii) Kako $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev u općem slučaju (upravo dokazano), onda $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u općem slučaju nije ni konvergentan. (Direktno, mogli smo primjetiti da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz prethodnog kontraprimjera ima dvije tačke gomilanja -1 i 1, pa sigurno nije konvergentan.)

c. $X = \mathcal{C}[0,1]$, $d(f(t), g(t)) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$, $a_n(t) = \max\{\frac{t}{n}, 1\}$
Ponovno prvobitno ispišimo nekoliko članova datog niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Kako je $t \in [0,1]$ imamo

$$\begin{aligned}
&a_1(t) = \max\{t, 1\} \equiv 1\\
&a_2(t) = \max\{\tfrac{t}{2}, 1\} \equiv 1\\
&\vdots\\
&a_n(t) = \max\{\tfrac{t}{n}, 1\} \equiv 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dakle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konstantan niz funkcija u $\mathcal{C}[0,1]$, i to konstantnih funkcija $a_n(t) \equiv 1$.
$\Rightarrow d(a_m, a_n) = \int_0^1 |a_m(t) - a_n(t)|dx = \int_0^1 |1 - 1|dx = 0$,
pa je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ očito ograničen, Cauchyev i konvergentan.

▲

Definicija 1.3.4 (KOMPLETNOST) *Neka je (X, d) metrički prostor, i $A \subset X$. A je kompletan ako je svaki Cauchyev niz u A konvergentan u A. Ako je X kompletan, kažemo da je metrički prostor (X, d) kompletan. ILI Metrički prostor (X, d) je kompletan ako je svaki Cauchyev niz u X konvergentan.*

Primjedba 1.3.3 *Iz same potrebe da se uvede i definicija Cauchyevog niza i konvergentnog niza, iz prethodnog teorema, zadatka, a i definicije kompletnosti jasno je da postoji razlika izmedju Cauchyevog i konvergentnog niza. Ukoliko ta razlika nije shvaćena iz samih definicija, rješavanje prethodnog zadatka tome je sigurno trebalo doprinjeti. Ipak, ovdje ćemo iznijeti i jedno intuitivnije objašnjenje zašto Cauchyev niz ne mora biti konvergentan. Naime, na osnovu teorema o kompletiranju zaključujemo da nekompletnost prostora X ne predstavlja izrazit problem, jer X možemo na neki način "kompletirati"*

- postoji kompletan prostor $\overline{X}$ takav da je X svuda gust u $\overline{X}$. Definicija svuda gustog skupa trebala bi biti poznata od ranije, a ponovno će biti navedena u sekciji 1.6. Intuitivno, iako prostor X nije kompletan, postoji prostor $\overline{X}$ koji je "samo malo veći" (po inkluziji) od X, a koji jeste kompletan. Izaberemo li proizvoljan Cauchyev niz u X, on je Cauchyev i u $\overline{X}$, pa je zbog kompletnosti prostora $\overline{X}$ taj niz i konvergentan u $\overline{X}$. Sada je jasno da je svaki Cauchyev niz u X na neki način "konvergentan", tj. ima granicu. Sigurno znamo da je ta granica u $\overline{X}$, no pravo pitanje je da li se ona nalazi u X ili ne. Samo od toga ustvari zavisi da li će posmatrani Cauchyev niz u X biti i konvergentan u X.

ZADATAK 1.3.2 $\mathbb{R}$ *je kompletan metrički prostor.*

Rješenje: Rezultat je poznat iz Matematičke analize I, jer je svaki realan Cauchyev niz konvergentan. ▲

ZADATAK 1.3.3 *Sljedeći metrički prostori su kompletni:*

a. $(\mathbb{R}^n, d_p) \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$

b. $(\mathbb{R}^n, d_\infty) \quad (n \in \mathbb{N})$

c. Prostor ograničenih funkcija $\mathcal{B}[a, b]$

d. Prostor neprekidnih funkcija $\mathcal{C}[a, b]$

e. $(l_p, d_p) \quad (1 \leq p < \infty)$

f. (l_∞, d_∞)

g. (c, d), *pri čemu je* c *prostor svih konvergentnih nizova u* $\mathbb{R}$, *i* $d(x, y) = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|$

h. (X, d), *pri čemu je* X *proizvoljan prostor, i* d *diskretna metrika.*

Dokazati!

Rješenje: Po definiciji, (X, d) je kompletan ako je svaki Cauchyev niz u X konvergentan u X. Stoga, želimo li pokazati da je odredjeni prostor kompletan, posmatramo proizvoljan Cauchyev niz i dokazujemo da je isti konvergentan.

a. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u $(\mathbb{R}^n, d_p)$ $(n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$.

$$\begin{array}{l} x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)}) \\ x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, ..., \xi_n^{(2)}) \\ x_3 = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, ..., \xi_n^{(3)}) \\ \vdots \\ x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}) \\ \vdots \\ x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}) \\ \vdots \end{array}$$

Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d_p(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu defincije metrike d_p ekvivalentno sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Dalje imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p,$$

a kako je jedan član sume manji ili jednak cijeloj sumi, vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \quad (\forall i \in \overline{1, n}).$$

Konačno, jasno je da vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (\forall i \in \overline{1, n}).$$

Pogledamo li pažljivije posljednju osobinu, jasno je da ona ustvari predstavlja činjenicu da je niz koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev $(\forall i \in \overline{1, n})$. No, uočimo i da je niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, odnosno da se radi o nizu realnih brojeva. Kako je, po prethodnom zadatku, $\mathbb{R}$ kompletan, svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan, pa je tako i niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Neka

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \quad (n \to \infty); \quad (i \in \overline{1, n}).$$

Za konkretan $i \in \overline{1,n}$ to znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_i \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_i \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}}.$$

Posmatrajmo sada tačku $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ i dokažimo da naš početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj tački.

$$d_p(x_n, x) = (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

jer se radi o konačnoj sumi u kojoj svaki sabirak teži nuli. Preciznije,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = \max\{n_1, n_2, ..., n_n\})(\forall n \in \mathbb{N}) :$$

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d_p(x_n, x) = (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} < (n(\frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}})^p)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Sasvim je jasno da je $x \in \mathbb{R}^n$, pa je stoga zaista $(\mathbb{R}^n, d_p)$ kompletan prostor $(n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$.

b. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u $(\mathbb{R}^n, d_\infty) \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$\begin{array}{l}
x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)}) \\
x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, ..., \xi_n^{(2)}) \\
x_3 = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, ..., \xi_n^{(3)}) \\
\vdots \\
x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}) \\
\vdots \\
x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}) \\
\vdots
\end{array}$$

Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d_\infty(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu defincije metrike d_∞ ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon.$$

Kako je svaki $|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|$ manji ili jednak od $\max\limits_{1\leq 1\leq n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|$, dalje imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (\forall i \in \overline{1,n}).$$

Pogledamo li pažljivije posljednju osobinu, jasno je da ona ustvari predstavlja činjenicu da je niz koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev $(\forall i \in \overline{1,n})$. No, uočimo i da je niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, odnosno da se radi o nizu realnih brojeva. Kako je, po prethodnom zadatku, $\mathbb{R}$ kompletan, svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan, pa je tako i niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Neka

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \quad (n \to \infty); \quad (i \in \overline{1,n}).$$

Za konkretan $i \in \overline{1,n}$ to znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_i \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_i \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon.$$

Posmatrajmo sada tačku $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ i dokažimo da naš početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj tački.

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \to 0,$$

jer se radi o maximumu konačno mnogo vrijednosti od kojih svaka teži nuli (taj maximum $\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|$ je upravo $|\xi_i^{(n)} - \xi_i|$ za neki $i \in \overline{1,n}$). Preciznije,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = \max\{n_1, n_2, ..., n_n\})(\forall n \in \mathbb{N}):$$

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d_\infty(x_n, x) = \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon.$$

Sasvim je jasno da je $x \in \mathbb{R}^n$, pa je stoga zaista $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ kompletan prostor $(n \in \mathbb{N})$.

c. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u $\mathcal{B}[a,b]$.

$$\begin{array}{ll}
f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}, & |f_1(t) - f_1(s)| < C_1 \quad (\forall t, s \in [a,b]) \\
f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}, & |f_2(t) - f_2(s)| < C_2 \quad (\forall t, s \in [a,b]) \\
f_3 : [a,b] \to \mathbb{R}, & |f_3(t) - f_3(s)| < C_3 \quad (\forall t, s \in [a,b]) \\
\vdots & \vdots \\
f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, & |f_n(t) - f_n(s)| < C_n \quad (\forall t, s \in [a,b]) \\
\vdots & \vdots \\
f_m : [a,b] \to \mathbb{R}, & |f_m(t) - f_m(s)| < C_m \quad (\forall t, s \in [a,b]) \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu definicije uobičajene metrike d ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

Izaberimo $t_0 \in [a, b]$ proizvoljno. Kako $|f_m(t_0) - f_n(t_0)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)|$, imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \varepsilon \quad (\forall t_0 \in [a, b]).$$

Medjutim, za izabrani $t_0 \in [a, b]$ niz $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ je niz realnih brojeva, koji je na osnovu posljednjeg izraza Cauchyev $(\forall t_0 \in [a, b])$. Kako je $\mathbb{R}$ kompletan, niz $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ je i konvergentan u $\mathbb{R}$ $(\forall t_0 \in [a, b])$. Neka

$$f_n(t) \to r_t \quad (n \to \infty); \quad (t \in [a, b])$$

Za konkretan $t \in [a, b]$ to znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_t \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - r_t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posmatrajmo sada sljedeću funkciju

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = r_t,$$

te dokažimo da početni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj funkciji.

$$d(f_n, f) = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - r_t| \to 0,$$

jer

$$\begin{aligned} & |f_n(t) - r_t| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in [a, b]) \\ \Rightarrow\ & \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - r_t| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Potpuno precizno, kako je početni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, već je navedeno da vrijedi

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow\ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(t) - f_n(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in [a, b]) \\ \overset{m\to\infty}{\Rightarrow}\ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in [a, b]) \\ \Rightarrow\ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(f, f_n) < \varepsilon \end{aligned}$$

Dakle, zaista je početni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, i to konvergira ka navedenoj funkciji f. Medjutim, još uvijek nismo došli do kraja zadatka. U posljednjoj primjedbi objašnjeno je da je svaki Cauchyev niz, pa tako i dati niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, na neki način "konvergentan", no da uvijek ne mora da vrijedi da je konvergentan u datom prostoru X (odakle i pojam kompletnosti). Odnosno, najvažnije je pitanje da li se "granica" tog niza nalazi u samom prostoru X. Konkretno, u našem zadatku je preostalo još pokazati da se granica datog niza, funkcija f zaista nalazi u skupu $\mathcal{B}[a,b]$. Želimo dakle pokazati da je funkcija $f(t) = r_t$ zaista ograničena funkcija. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $s, t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |f(t) - f_n(t) + f_n(t) - f_n(s) + f_n(s) - f(s)| \\ &\leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| \\ &\overset{*}{<} A + C_n + B \\ &< C_n + \varepsilon, \end{aligned}$$

što je upravo ekivaletno definiciji ograničene funkcije (pri čemu * označava činjenicu da su nizovi $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(f_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ ograničeni jer su konvergentni - pogledati dokaz tog teorema u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)", te ograničenost funkcije f_n, gdje je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan). Dobili smo da je proizvoljan Cauchyev niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{B}[a,b]$ konvergentan, i to da je granica niza, funkcija f takodjer u $\mathcal{B}[a,b]$, pa je $\mathcal{B}[a,b]$ kompletan.

d. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u $\mathcal{C}[a,b]$.

$$\begin{array}{ll} f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}, & |t-s| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(t) - f_1(s)| < \varepsilon \\ f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}, & |t-s| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(t) - f_2(s)| < \varepsilon \\ f_3 : [a,b] \to \mathbb{R}, & |t-s| < \delta_3 \Rightarrow |f_3(t) - f_3(s)| < \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, & |t-s| < \delta_n \Rightarrow |f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ f_m : [a,b] \to \mathbb{R}, & |t-s| < \delta_m \Rightarrow |f_m(t) - f_m(s)| < \varepsilon \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Prvi dio dokaza analogan je slučaju c., no ponoviti ćemo ga radi vježbe. Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu definicije uobičajene metrike d ekvivalentno sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

Izaberimo $t \in [a,b]$ proizvoljno. Kako $|f_m(t) - f_n(t)| \leq \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)|$, imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N}): \quad m,n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \quad (\forall t \in [a,b]).$$

Medjutim, za izabrani $t \in [a,b]$ niz $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ je niz realnih brojeva, koji je na osnovu posljednjeg izraza Cauchyev ($\forall t \in [a,b]$). Kako je $\mathbb{R}$ kompletan, niz $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ je i konvergentan u $\mathbb{R}$ ($\forall t \in [a,b]$). Neka

$$f_n(t) \to r_t \quad (n \to \infty) \quad (t \in [a,b])$$

Za konkretan $t \in [a,b]$ to znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_t \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_t \Rightarrow |f_n(t) - r_t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posmatrajmo sada sljedeću funkciju

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = r_t,$$

te dokažimo da početni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj funkciji.

$$d(f_n, f) = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - r_t| \to 0,$$

jer

$$\begin{aligned} & |f_n(t) - r_t| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in [a,b]) \\ \Rightarrow \quad & \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - r_t| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Potpuno precizno, kako je početni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, već je navedeno da vrijedi

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N}): \quad m,n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N}): \quad m,n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(t) - f_n(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in [a,b]) \\ \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in [a,b]) \\ \Rightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(f, f_n) < \varepsilon \end{aligned}$$

Dakle, zaista je početni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, i to konvergira ka navedenoj funkciji f. Dokažimo još da $f \in \mathcal{C}[a,b]$, odnosno da je f neprekidna funkcija. Kako bi dokazali neprekidnost funkcije f na $[a,b]$, dokazujemo da je f neprekidna u svakoj tački $s \in [a,b]$. U tu svrhu fiksirajmo proizvoljni $s \in [a, b]$, te dokažimo da je f neprekidna u s, što je na osnovu definicije neprekidne funkcije u tački ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b]) : \quad |t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, i $t \in [a, b]$ takav da $|t - s| < \delta$. Tada

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |f(t) - f_n(t) + f_n(t) - f_n(s) + f_n(s) - f(s)| \\ &\leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| \\ &= |r_t - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - r_s| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

što je upravo ekvivaletno definiciji neprekidne funkcije ($n \in \mathbb{N}$ biramo dovoljno veliki broj, tj. $n \geq n_0$). Preciznije, za proizvoljnu tačku $s \in [a, b]$ dobili smo da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta_n > 0)(\forall t \in [a, b]) : \quad |t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < 2\varepsilon.$$

Dakle, proizvoljan Cauchyev niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{C}[a, b]$ je konvergentan, i granica niza, funkcija f takodjer je u $\mathcal{C}[a, b]$, pa je $\mathcal{C}[a, b]$ kompletan. Posljednji dio dokaza, da je f takodjer neprekidna funkcija, mogli smo provesti i na jednostavniji način, koji je najčešće iznošen u literaturi. Naime, pokazali smo da $f_n \to f$ (kad $n \to \infty$), što ustvari znači da niz funkcija $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji f. Od ranije je poznato da, ukoliko niz neprekidnih funkcija uniformno konvergira ka f, i sama granična funkcija f mora biti neprekidna. Time je dokaz završen.

e. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u (l_p, d_p) $(1 \le p < \infty)$.

$$\begin{array}{ll}
x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)}, ...), & \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(1)}|^p < \infty \\
x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, ..., \xi_n^{(2)}, ...), & \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(2)}|^p < \infty \\
x_3 = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, ..., \xi_n^{(3)}, ...), & \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(3)}|^p < \infty \\
\vdots & \vdots \\
x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}, ...), & \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p < \infty \\
\vdots & \vdots \\
x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}, ...), & \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)}|^p < \infty \\
\vdots &
\end{array}$$

Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \ge n_0 \Rightarrow d_p(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu definicije metrike d_p ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \ge n_0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Dalje imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \ge n_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p,$$

a kako je jedan član sume manji ili jednak cijeloj sumi, vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \ge n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Konačno, jasno je da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \ge n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Pogledamo li pažljivije posljednju osobinu, jasno je da ona ustvari predstavlja činjenicu da je niz koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev $(\forall i \in \mathbb{N})$. No, uočimo i da je niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, odnosno da se radi o nizu realnih brojeva. Kako je, po prethodnom zadatku, $\mathbb{R}$ kompletan, svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan, pa je tako i niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Neka

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \quad (n \to \infty); \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Za konkretan $i \in \mathbb{N}$ to znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_i \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_i \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon.$$

Posmatrajmo sada tačku $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ i dokažimo da naš početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj tački. Pristup nam ovaj put mora biti drugačiji, jer iako

$$d_p(x_n, x) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

i svaki član $|\xi_i^{(n)} - \xi_i|$ teži nuli, ne mora vrijediti da $d_p(x_n, x) \to 0$. Naime, radi se o beskonačnoj sumi, odnosno redu, a poznato je da činjenica da opći član reda konvergira ka nuli, je samo potreban, ali ne i dovoljan uslov za konvergenciju reda (npr. poznato je da red $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ nije konvergentan, iako očito opći član reda $\frac{1}{i}$ teži nuli).
Prisjetimo se da je red konvergentan akko (po definiciji) je konvergentan niz parcijalnih suma tog reda. Dakle, da bi dokazali konvergenciju reda $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p$, dovoljno je da pokažemo da je konvergentan niz $(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p)_{N\in\mathbb{N}}$. Ranije u zadatku već je navedeno da, kako je početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ po pretpostavci Cauchyev, vrijedi

$$\begin{aligned}
& (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d_p(x_m, x_n) < \tfrac{\varepsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \\
\Rightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \frac{\varepsilon^p}{4} \\
\Rightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \frac{\varepsilon^p}{4} \quad (\forall N \in \mathbb{N}) \\
\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{N} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{4} < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad (\forall N \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Dakle, niz parcijalnih suma $(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p)_{N\in\mathbb{N}}$ je ograničen odozgo sa $\frac{\varepsilon^p}{2}$, a jasno je da je rastući, pa je taj niz konvergentan. Kako posljednji izraz vrijedi za sve $N \in \mathbb{N}$, možemo uzeti $N \to \infty$, kada dobijamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2} < \varepsilon^p.$$

Sada jasno slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

što je na osnovu definicije metrike d_p ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d_p(x_n, x) < \varepsilon.$$

Dakle, zaista vrijedi da $x_n \to x$ (kad $n \to \infty$). Pokažimo još da $x \in l_p$, tj. da je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ p sumabilan niz. Ponovno ćemo konvergenciju reda $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|^p$ dokazivati preko konvergencije njegovog niza parcijalnih suma. Kako je početni niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyev, on je ograničen, pa sve članove tog niza možemo smjestiti u kuglu $B(0, r)$, tj. vrijedi

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad x_n \in B(0, r) \\
\Leftrightarrow & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad d_p(0, x_n) < r \\
\Leftrightarrow & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad d_p((0)_{i \in \mathbb{N}}, (\xi_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}) < r \\
\Leftrightarrow & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad (\sum_{i=1}^{\infty} |0 - \xi_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < r \\
\Leftrightarrow & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p < r^p \\
\Rightarrow & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \sum_{i=1}^{N} |\xi_i^{(n)}|^p < r^p \quad (\forall N \in \mathbb{N}) \\
\stackrel{n \to \infty}{\Rightarrow} & (\exists r > 0) : \quad \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p \leq r^p \quad (\forall N \in \mathbb{N})
\end{array}$$

Dakle, niz parcijalnih suma reda $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi|^p$ je ograničen, a kako je očigledno rastući, taj je niz konvergentan, pa je konvergentan i sam red $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi|^p$, odnosno

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi|^p < \infty.$$

Stoga, po definiciji prostora l_p, vrijedi $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_p$, čime je dokaz završen.

f. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u (l_∞, d_∞).

$$\begin{array}{ll}
x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)}, ...) & \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(1)}| < \infty \\
x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, ..., \xi_n^{(2)}, ...) & \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(2)}| < \infty \\
x_3 = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, ..., \xi_n^{(3)}, ...) & \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(3)}| < \infty \\
\vdots & \\
x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}, ...) & \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)}| < \infty \\
\vdots & \vdots \\
x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}, ...) & \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)}| < \infty \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d_\infty(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu defincije metrike d_∞ ekvivalentno sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon.$$

Kako je svaki $|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|$ manji ili jednak od $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|$, dalje imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Pogledamo li pažljivije posljednju osobinu, jasno je da ona ustvari predstavlja činjenicu da je niz koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev $(\forall i \in \mathbb{N})$. No, uočimo i da je niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, odnosno da se radi o nizu realnih brojeva. Kako je, po prethodnom zadatku, $\mathbb{R}$ kompletan, svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan, pa je tako i niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Neka

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \quad (n \to \infty); \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Za konkretan $i \in \overline{1, n}$ to znači

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_i \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_i \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posmatrajmo sada tačku $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ i dokažimo na naš početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj tački.

$$d_\infty(x_n, x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \to 0,$$

jer

$$\begin{aligned} & |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \quad & \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Preciznije, kako je početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, već je navedeno da

$$\begin{aligned} & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i - \xi_i^{(n)}| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - \xi_i^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon, \end{aligned}$$

što upravo znači da prvobitni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x. Ostalo je još pokazati da je $x \in l_\infty$, odnosno da je x ograničen niz, tj. da $\sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty$. Dokazati ćemo to slično kao prethodnom slučaju. Naime, kako je početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, on je ograničen, pa sve članove tog niza možemo smjestiti u kuglu $B(0, r)$, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad x_n \in B(0, r) \\ \Leftrightarrow \quad & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad d_\infty(0, x_n) < r \\ \Leftrightarrow \quad & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad d_\infty((0)_{i\in\mathbb{N}}, (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}) < r \\ \Leftrightarrow \quad & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \sup_{i\in\mathbb{N}} |0 - \xi_i^{(n)}| < r \\ \Leftrightarrow \quad & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)}| < r \\ \Rightarrow \quad & (\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad |\xi_i^{(n)}| < r \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \quad & (\exists r > 0) : \quad |\xi_i| \leq r \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \quad & (\exists r > 0) : \quad \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \leq r < \infty \end{aligned}$$

Stoga, po definiciji prostora l_∞, vrijedi $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, čime je dokaz završen.

g. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u (c,d).

$$\begin{array}{ll}
x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)}, ...), & (\xi_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergentan} \\
x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, ..., \xi_n^{(2)}, ...), & (\xi_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergentan} \\
x_3 = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, ..., \xi_n^{(3)}, ...), & (\xi_i^{(3)})_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergentan} \\
\vdots & \\
x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}, ...), & (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergentan} \\
\vdots & \vdots \\
x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}, ...), & (\xi_i^{(m)})_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergentan} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Na osnovu definicije Cauchyevog niza, imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

što je na osnovu defincije metrike d ekvivalentno sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon.$$

Kako je svaki $|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|$ manji ili jednak od $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|$, dalje imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Pogledamo li pažljivije posljednju osobinu, jasno je da ona ustvari predstavlja činjenicu da je niz koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev $(\forall i \in \mathbb{N})$. No, uočimo i da je niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, odnosno da se radi o nizu realnih brojeva. Kako je, po prethodnom zadatku, $\mathbb{R}$ kompletan, svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan, pa je tako i niz $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Neka

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \quad (n \to \infty); \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Za konkretan $i \in \mathbb{N}$ to znači

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_i \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_i \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posmatrajmo sada tačku $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in \mathbb{R}^n$ i dokažimo na naš početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj tački.

$$d_\infty(x_n, x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \to 0,$$

jer

$$\begin{aligned} & |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \quad & \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Preciznije, kako je početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, već je navedeno da

$$\begin{aligned} & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i - \xi_i^{(n)}| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - \xi_i^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon, \end{aligned}$$

što upravo znači da prvobitni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x. Ostalo je još pokazati da je $x \in c$, odnosno da je x konvergentan niz. Kako je $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...)$ niz realnih brojeva, zbog kompletnosti prostora $\mathbb{R}$ dovoljno je pokazati da je x Cauchyev niz. (Inače, upravo je navedeno čest "trik" - ukoliko se granica niza sama intuitivno ne nameće, kao u dosadašnjim primjerima, obratite pažnju da li je taj niz u kompletnom prostoru, čime postaje dovoljno pokazati da je niz Cauchyev.) Odaberemo li proizvoljne $i, j \to \infty$, na osnovu svega navedenog imamo

$$\begin{aligned} |\xi_i - \xi_j| & = |\xi_i - \xi_i^{(n)} + \xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)} + \xi_j^{(n)} - \xi_j| \\ & \leq |\xi_i - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| + |\xi_j^{(n)} - \xi_j| \\ & \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ & = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

što upravo znači da je niz $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev ($n \in \mathbb{N}$ biramo dovoljno veliki broj, tj. $n \geq n_0$, uz što koristimo i činjenicu da je $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}} \in c$, tj. $(\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ je konvergentan niz, pa je i Cauchyev). Preciznije,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_n \in \mathbb{N})(\forall i, j \in \mathbb{N}) : \quad i, j \geq n_n \Rightarrow |\xi_i - \xi_j| < 2\varepsilon,$$

pa je $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u $\mathbb{R}$, pa je konvergentan. Dakle početni Cauchyev niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački $x \in c$, pa je c kompletan.

h. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u X. U ovom slučaju ne možemo jasnije ispisati elemente posmatranog niza ni kada bismo to htjeli, jer ne znamo prirodu skupa X. Stoga odmah predjimo na detaljniji opis navednog svojstva, tj. na osnovu definicije Cauchyevog niza jasno je da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Kako navedena osobina vrijedi za sve $\varepsilon > 0$, vrijedi i za $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pa zbog definicije diskretne metrike imamo

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) = 0.$$

Kako posljednja osobina pak vrijedi za sve $m \in \mathbb{N}$ takve da $m \geq n_0$, izaberimo baš $m = n_0$. Tada

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) = 0.$$

Sada je jasno da, izaberemo li $\varepsilon > 0$ proizvoljno, sigurno vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) = 0 < \varepsilon,$$

što upravo znači da početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x_{n_0}. Kako je taj posmatrani niz u X, onda je i svaki njegov element u X, pa tako i $x_{n_0} \in X$. Dakle, (X, d) je kompletan.

▲

Primjedba 1.3.4 *Konačno, rezimirajmo kako se dokazuje kompletnost prostora (X, d). Radi jednostavnijeg razmatranja, neka je X prostor nizova $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ koji zadovoljavaju odredjeno svojstvo. Prvobitno biramo proizvoljan Cauchyev niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X, a zatim je poželjno napisati nekoliko članova tog niza kako bismo imali bolji uvid u prirodu prostora X.*

I *Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev, pa na osnovu definicije Cauchyevog niza zadovoljava osobinu (*):*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d((\xi_i^{(m)})_{i\in\mathbb{N}}, (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}) < \varepsilon$$

II *Jednostavnim manipulacijama osobine (*) zaključujemo da su nizovi koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \quad (i \in \mathbb{N})$ Cauchyevi u $\mathbb{R}$, pa su konvergentni u $\mathbb{R}$. Neka*

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \quad (n \to \infty); \quad (i \in \mathbb{N})$$

III *Posmatramo tačku $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ i dokazujemo da početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo toj tački. Kako osobina (*) vrijedi za sve $m \in \mathbb{N}$ takve da $m \geq n_0$, nakon nekoliko potrebnih izmjena u (*), možemo uzeti da $m \to \infty$, kada (ponovno nakon nekih izmjena) dobijamo*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}) < \varepsilon,$$

što je upravo ekvivalentno činjenici da $x_n \to x \quad (n \to \infty)$. (Dakle, za sve $\varepsilon > 0$ ovdje postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ kojeg možemo uzeti da je jednak n_0 iz prvobitne (*).)

IV Ostalo je još pokazati da $x \in X$, što je obično dosta jednostavan zadatak. U tu svrhu najčešće se koristi početna pretpostavka o prirodi svih elemenata u X, te činjenica da su nizovi koordinata $(\xi_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \quad (i \in \mathbb{N})$ konvergentni, ili osobinu (*) u bilo kojem od navedenih oblika.

Primjetite da prethodni zadatak nije uvijek radjen po navedenim koracima (npr. slučaj a. i b.), ali je dokaz mogao u potpunosti pratiti ove korake, i kao takav bi čak bio jednostavniji.

Kako bi se pojam kompletnosti što bolje shvatio korisnije je, ipak, uvidjeti zašto neki prostori nisu kompletni. Nedostatak kompletnosti sa sigurnošću će više doprinijeti razumijevanju "ljepote" ovog svojstva.

> *Bolje je jednom dokazati da nešto ne vrijedi,*
> *Nego stotinu puta da to vrijedi.*
> (Fehim Dedagić)

Stoga se studentima preporučuje posebnu pažnju obratiti na sljedeći zadatak, kao i sve takvog tipa.

ZADATAK 1.3.4 *Sljedeći metrički prostori nisu kompletni:*

a. $(\mathbb{Q}, d)$, *pri čemu je d Euklidska metrika*

b. $([0,1), d)$, *pri čemu je d Euklidska metrika*

c. $(\mathcal{C}[a,b], d)$, *pri čemu je* $d(f(t), g(t)) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$

d. Skup polinoma na $[0,1]$, *snadbjeven metrikom* $d(x(t), y(t)) = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t) - y(t)|$

e. (c_{00}, d_∞), *pri čemu je* $c_{00} = \{x = (\xi_i) : \xi_i \in \mathbb{C}, (\exists K = K(x)) : \xi_i = 0 \quad \forall i \geq K\}$

Dokazati!

Rješenje: Na osnovu negacije definicije kompletnosti, X nije kompletan ako postoji niz u X koji je Cauchyev, ali nije konvergentan. Upravo takve nizove navesti ćemo u sljedećim primjerima.

a. Posmatrajmo niz racionalnih brojeva

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1,4\\
&x_2 = 1,41\\
&x_3 = 1,414\\
&x_4 = 1,4142\\
&x_5 = 1,41421\\
&\vdots
\end{aligned}$$

tj. niz u $\mathbb{Q}$ čiji je opći član x_n jednak broju $\sqrt{2}$ zaokruženom na n decimala. Jasno je da je posmatrani niz Cauchyev u $\mathbb{Q}$, jer za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}(m > n)$

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| \leq \frac{1}{10^n} \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

S druge strane, $x_n \to \sqrt{2} NE \in \mathbb{Q}$, pa niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije konvergentan u $\mathbb{Q}$.

b. Posmatrajmo sljedeći niz u $[0, 1)$

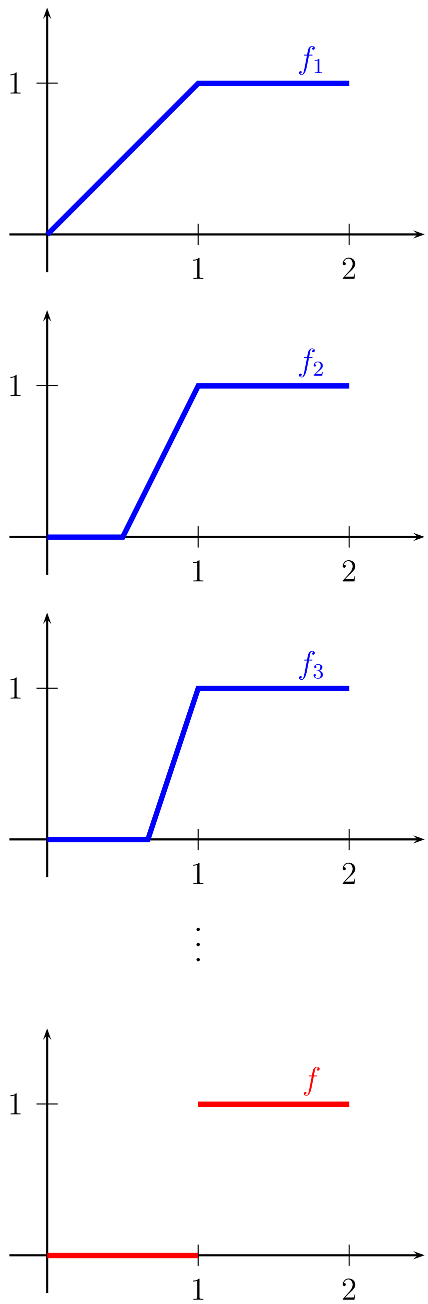
$$\begin{aligned}
&x_1 = 0\\
&x_2 = \tfrac{1}{2}\\
&x_3 = \tfrac{2}{3}\\
&x_4 = \tfrac{3}{4}\\
&\vdots\\
&x_n = 1 - \tfrac{1}{n}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je očito Cauchyev jer

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

ali $x_n \to 1$, pa nije konvergentan u $[0, 1)$.

c. Radi lakšeg razmatranja, posmatrajmo prostor $\mathcal{C}[0, 2]$. Cilj nam je pronaći niz neprekidnih funkcija na $[0, 2]$ koje konvergiraju ka funkciji koja sama nije neprekidna. Intuitivno, jasno je da će niz neprekidnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa sljedeće slike konvergirati ka prekidnoj funkciji f :



Opći član navedenog niza, funkcija f_n uzima vrijednost 0 na intervalu $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, vrijednost 1 na intervalu $[1, 2]$, a da bi bila neprekidna najjednostavnije je da (kao na slici) na preostalom intervalu $(1 - \frac{1}{n}, 1)$ bude prava. Da bi funkciju f_n eksplicitno zadali i na tom intervalu, posmatrajmo jednačinu prave kroz dvije tačke $(1-\frac{1}{n},0)$ i $(1,1)$:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \\ y-0 &= \frac{1-0}{1-(1-\frac{1}{n})}(x-1+\frac{1}{n}) \\ y &= n(x-1+\tfrac{1}{n}) \\ y &= nx-n+1 \end{aligned}$$

Dakle, posmatrati ćemo niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neprekidnih funkcija na $[0,2]$ definiranih na sljedeći način:

$$f_n(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,1-\frac{1}{n}] \\ nt-n+1, & t\in(1-\frac{1}{n},1) \\ 1, & t\in[1,2]. \end{cases}$$

Pokažimo prvobitno da je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev. Neka su $m,n\in\mathbb{N}$ proizvoljni, $m>n$.

$$d(f_n,f_m)=\int_0^2|f_n(t)-f_m(t)|dt$$

Funkcije f_n i f_m su neprekidne funkcije, tj. pripadaju prostoru $\mathcal{C}[0,2]$, a kako je d metrika prethodni integral postoji, pa možemo pisati

$$\begin{aligned} d(f_n,f_m) &= \int_0^2|f_n(t)-f_m(t)|dt \\ &= \int_0^{1-\frac{1}{n}}|f_n(t)-f_m(t)|dt+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}|f_n(t)-f_m(t)|dt \\ &\quad +\int_{1-\frac{1}{m}}^{1}|f_n(t)-f_m(t)|dt+\int_1^2|f_n(t)-f_m(t)|dt \\ &= \int_0^{1-\frac{1}{n}}|0-0|dt+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}|nt-n+1-0|dt \\ &\quad +\int_{1-\frac{1}{m}}^{1}|nt-n+1-(mt-m+1)|dt+\int_1^2|1-1|dt \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}[nt-(n-1)]dt+\int_{1-\frac{1}{m}}^{1}(m-n)(1-t)dt \\ &= n\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}tdt-(n-1)\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}dt+(m-n)\int_{1-\frac{1}{m}}^{1}dt-(m-n)\int_{1-\frac{1}{m}}^{1}tdt \\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{m})\to 0 \end{aligned}$$

kada $m,n\to\infty$. Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev niz u $\mathcal{C}[a,b]$. Posmatrajmo funkciju

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,1) \\ 1, & t\in[1,2], \end{cases}$$

i dokažimo da $f_n \to f \quad (n \to \infty)$. Slično kao ranije, imamo

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \int_0^2 |f_n(t) - f(t)| dt \\ &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)| dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f_n(t) - f(t)| dt + \int_1^2 |f_n(t) - f(t)| dt \\ &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} |0 - 0| dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |nt - n + 1 - 0| dt + \int_1^2 |1 - 1| dt \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 [nt - (n-1)] dt \\ &= n \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t dt - (n-1) \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt \\ &= \frac{1}{2n} \to 0 \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$. Medjutim, jasno je da $f NE \in \mathcal{C}[0, 2]$, pa niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nije konvergentan u $\mathcal{C}[a, b]$. Time je dokaz završen. (Primjetite da je u prethodnom zadatku dokazano da je $\mathcal{C}[a, b]$ sa uobičajenom metrikom kompletan prostor, dok sa ovako definiranom metrikom to nije, što nam potvrdjuje da je uobičajena metrika zaista uglavnom povoljnija. Studentima se preporučuje da pokušaju eksplicitno razjasniti zašto ovaj primjer ne bi mogao pokazati i nekompletnost prostora $\mathcal{C}[a, b]$ sa uobičajenom metrikom.)

d. Izaberimo neku funkciju $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ koja nije polinom. Na osnovu Taylorovog teorema, f se može aproksimirati polinomom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Sada posmatrajmo sljedeći niz polinoma u X

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ p_2(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &\vdots \\ p_k(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lako se pokazuje da je niz $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyev u X (ostavljeno čitaocima za vježbu). Medjutim, niz $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ očito konvergira ka funkciji $f(x)$ koja nije polinom, tj. $f NE \in X$. Stoga, X nije kompletan prostor.

e. Posmatrajmo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
&x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)}, ...) = (p, 0, 0, 0, ...)\\
&x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \xi_4^{(2)}, ...) = (p, p^2, 0, 0, ...)\\
&x_3 = (\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, \xi_4^{(3)}, ...) = (p, p^2, p^3, 0, ...)\\
&\vdots\\
&x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \xi_4^{(n)}, ...) = (p, p^2, p^3, p^4, ..., p^n, 0, 0, 0, ...)\\
&\vdots\\
&x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, \xi_4^{(m)}, ...) = (p, p^2, p^3, p^4, ..., p^m, 0, 0, 0, ...)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

tj. niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je opći član niza zadat sa

$$x_n = (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}, \quad \xi_i^{(n)} = \begin{cases} p^i, & i \leq n,\\ 0, & i > n,\end{cases}$$

pri čemu je $p \in (0,1)$ proizvoljan. (Tako ustvari ima kontinuum mnogo ovakvih nizova, no dovoljno je da posmatramo samo jedan, za neki fiksirani $p \in (0,1)$.) Želimo pokazati da je navedeni niz Cauchyev u (c_{00}, d_∞), ali da nije konvergentan. Prvobitno dokažimo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaista niz u c_{00}. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} p^i, & i \leq n,\\ 0, & i \geq n,\end{cases}$$

jasno je da $\xi_i^{(n)} \in \mathbb{C}$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Takodjer,

$$(\exists K = K(x_n) = n+1): \quad \xi_i^{(n)} = 0 \text{ za sve } i \geq K.$$

Dakle, $x_n \in c_{00}$ za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, tj. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz u c_{00}. Sada se uvjerimo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u c_{00}.

$$\begin{aligned}
&(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyev u } c_{00}\\
\Leftrightarrow\ &(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon\\
\Leftrightarrow\ &(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Posmatrajmo stoga proizvoljan $\varepsilon > 0$, te proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$. Bez umanjenja općenitosti pretpostavimo da $m > n$.

$$\begin{aligned}
x_n &= (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, ..., \xi_{n-1}^{(n)}, \xi_n^{(n)}, \xi_{n+1}^{(n)} ..., \xi_{m-1}^{(n)}, \xi_m^{(n)}, \xi_{m+1}^{(n)}, ...)\\
&= (p, p^2, ..., p^{n-1}, p^n, 0, ..., 0, 0, 0, ...)\\
x_m &= (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ..., \xi_{n-1}^{(m)}, \xi_n^{(m)}, \xi_{n+1}^{(m)} ..., \xi_{m-1}^{(m)}, \xi_m^{(m)}, \xi_{m+1}^{(m)}, ...)\\
&= (p, p^2, ..., p^{n-1}, p^n, p^{n+1}, ..., p^{m-1}, p^m, 0, ...)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| = \begin{cases} 0, & i \leq n \text{ ili } i > m \\ p^i, & n+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Kako je $p \in (0,1), p^i$ je sve veći broj ukoliko je eksponent i manji, tj. $p^u > p^v$ za $u < v$. Dakle

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| = \sup\{p^{n+1}, p^{n+2}, ..., p^m, 0\} = p^{n+1}$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned} & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyev u } c_{00} \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow p^{n+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

što je očigledno tačno jer

$$\begin{aligned} p^{n+1} < \varepsilon \quad & \Leftrightarrow \log_p p^{n+1} > \log_p \varepsilon \\ & \Leftrightarrow n + 1 > \log_p \varepsilon \\ & \Leftrightarrow n > \log_p \varepsilon - 1, \end{aligned}$$

pa vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = \lceil log_p \varepsilon - 1 \rceil \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow p^{n+1} < \varepsilon.$$

Dobili smo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev u c_{00}. Sada posmatrajmo tačku $x = (p, p^2, p^3, ..., p^n, ...)$, i dokažimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x.

$$\begin{aligned} & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergira ka } x \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - p^i| < \varepsilon \end{aligned}$$

Analogno kao ranije zaključujemo

$$|\xi_i^{(n)} - p^i| = \begin{cases} 0, & i \leq n \\ p^i, & i > n, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - p^i| = p^{n+1}$$

pa opet imamo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = \lceil log_p \varepsilon - 1 \rceil \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

tj. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, i $x_n \to x$ kad $n \to \infty$. Ali (!), primjetimo takodjer da $xNE \in c_{00}$. Naime, $x = (p, p^2, ..., p^n, ...)$, tj. $\xi_i = p^i \neq 0$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Svi članovi niza su nenulti kompleksni brojevi, tj. ne vrijedi

$$(\exists K = K(x)) : \quad \xi_i = 0 \quad \forall i \geq K.$$

Konačno, polazni Cauchyev niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u c_{00} knovergira ka tački koja nije u c_{00}, pa (kako je granica niza jedinstvena) c_{00} nije kompletan.

▲

Konačno, navesti ćemo jedan zadatak koji ima za cilj dodatno usavršavanje razumijevanja jako bitnih pojmova - Cauchyev i konvergentan niz.

ZADATAK 1.3.5 *Neka je (X,d) metrički prostor.*

a. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyevi nizovi u* $X \Rightarrow (d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *je konvergentan niz*

b. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyev niz u* $X \Rightarrow (d(x_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ *je konvergentan niz u* $X (x \in X)$

c. Da li u b. vrijedi obrat? Objasniti!

Rješenje:

a. Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyevi nizovi u X. Tada vrijedi $d(x_n,x_m) \to 0, d(y_n,y_m) \to 0$ kad $m,n \to \infty$. Želimo pokazati da je niz $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Medjutim, primjetimo da je $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva, a kako je $\mathbb{R}$ kompletan, dovoljno je da pokažemo da je $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u $\mathbb{R}$.

$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \leq d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m) \to 0$$

Dakle, $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je zaista Cauchyev niz u $\mathbb{R}$, pa je zbog kompletnosti prostora $\mathbb{R}$ i konvergentan.

b. Tvrdnja b. specijalan je slučaj tvrdnje a., uzmemo li niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kao konstantan, pri čemu je $y_n = x$.

c. Lako uočavamo da u b. ne vrijedi obrat posmatramo li diskretni metrički prostor (X,d) (primjetite da nam je, kao što je na početku navedeno, diskretna metrika već nekoliko puta poslužila kao koristan kontraprimjer!). Naime, izaberemo li bilo kakav niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i neku tačku $x \in X$ koja se razlikuje od svih elemenata tog niza (štaviše, konačno mnogo članova niza svakako uvijek možemo zanemariti), jasno je da će niz $(d(x_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ biti konstantan niz, $(d(x_n,x)) = 1$, pa je svakako konvergentan, bez obzira na početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konkretno, izaberimo naprimjer $X = \mathbb{R}$, i uočimo na zadatim nizovima prethodna razmatranja.

   1. $x_n = (-1)^n, x = 0$

2. $x_n = n+1, x = 1$

Zaista, u oba navedena primjera niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyev, ali je niz $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konstantan, pa je jasno da je i konvergentan.

▲

1.4 Banachov stav o fiksnoj tački

Definicija 1.4.1 (FIKSNA TAČKA) *Tačka $x \in X$ je fiksna tačka preslikavanja $f : X \to X$ ako vrijedi $f(x) = x$.*

ZADATAK 1.4.1 *Naći fiksne tačke sljedećih preslikavanja:*

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiranog sa* $f(x) = x^2 - 6$.

b. $A : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ *definiranog sa* $A(f(x)) = f'(x)$.

Rješenje:

a. Fiksne tačke $x \in \mathbb{R}$ preslikavanja f odredjujemo iz uslova

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6 = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = -2 \vee x_2 = 3 \end{aligned}$$

Dakle, fiksne tačke preslikavanja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su $x = -2$ i $x = 3$.

b. Fiksne tačke $f \in \mathcal{C}[0,1]$ preslikavanja A odredjujemo iz uslova

$$\begin{aligned} & A(f(x)) = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & f'(x) = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{df(x)}{dx} = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{df(x)}{f(x)} = dx \\ \Leftrightarrow\ & \int \tfrac{1}{f(x)} df(x) = \int dx \\ \Leftrightarrow\ & \ln f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = e^x \end{aligned}$$

Dakle, fiksna tačka preslikavanja $A : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

▲

Definicija 1.4.2 (KONTRAKCIJA) *Preslikavanje $f : X \to X$ je kontraktivno, odnosno kontrakcija, ako vrijedi:*

$$(\exists q \in [0,1))(\forall x, y \in X): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y).$$

ZADATAK 1.4.2 *Ispitati koja od sljedećih preslikavanja su kontrakcija:*

a. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *definirano matricom* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *definirano matricom* $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

c. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *definirano matricom* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \\ \frac{-5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

d. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirano sa* $f(x) = \sin x$

Rješenje:

a. Neka su $x, y \in \mathbb{C}^2$ proizvoljni. Tada

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

gdje su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$, pa je

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}.$$

Imamo

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 \\ \frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \sqrt{|\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}y_1|^2 + |\tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}y_2|^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4}|x_1 - y_1|^2 + \tfrac{1}{9}|x_2 - y_2|^2} \\ &\leq \sqrt{\tfrac{1}{4}|x_1 - y_1|^2 + \tfrac{1}{4}|x_1 - y_1|^2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \\ &= \tfrac{1}{2}d(x,y) \end{aligned}$$

Dakle,

$$(\exists q = \frac{1}{2} \in [0,1))(\forall x, y \in \mathbb{C}^2): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y),$$

tj. f jeste kontrakcija.

b. Neka su $x, y \in \mathbb{C}^2$ proizvoljni. Tada

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

gdje su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$, pa je

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}.$$

Imamo

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \\ \frac{-1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 \\ \frac{-1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\begin{array}{cl}
 & d(f(x), f(y)) \\
= & \{|(\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2) - (\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2)|^2 + |(\frac{-1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2) - (\frac{-1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2)|^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \{|\frac{1}{6}(x_1 - y_1) + \frac{1}{6}(x_2 - y_2)|^2 + |\frac{-1}{3}(x_1 - y_1) + \frac{2}{3}(x_2 - y_2)|^2\}^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \{(|\frac{1}{6}(x_1 - y_1)| + |\frac{1}{6}(x_2 - y_2)|)^2 + (|\frac{-1}{3}(x_1 - y_1)| + |\frac{2}{3}(x_2 - y_2)|)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq} & \{(\sqrt{|\frac{1}{6}|^2 + |\frac{1}{6}|^2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2})^2 \\
 & +(\sqrt{|\frac{1}{3}|^2 + |\frac{2}{3}|^2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|})^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \{(|\frac{1}{6}|^2 + |\frac{1}{6}|^2)(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2) \\
 & +(|\frac{1}{3}|^2 + |\frac{2}{3}|^2)(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \sqrt{(|\frac{1}{6}|^2 + |\frac{1}{6}|^2 + |\frac{1}{3}|^2 + |\frac{2}{3}|^2)(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)} \\
= & \sqrt{|\frac{1}{6}|^2 + |\frac{1}{6}|^2 + |\frac{1}{3}|^2 + |\frac{2}{3}|^2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \\
= & \frac{\sqrt{22}}{6} d(x,y)
\end{array}$$

(Hölderova nejednakost primjenjena je dva puta, i to prvi put na

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{6}, \quad b_1 = x_1 - y_1 \\ a_2 = \frac{1}{6}, \quad b_2 = x_2 - y_2, \end{array}$$

a drugi put na

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{-1}{3}, & b_1 = x_1 - y_1 \\ a_2 = \frac{2}{3}, & b_2 = x_2 - y_2. \end{array}$$

) Dakle,

$$(\exists q = \frac{\sqrt{22}}{6} \in [0,1))(\forall x, y \in \mathbb{C}^2): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y),$$

tj. f jeste kontrakcija.

c. Neka su $x, y \in \mathbb{C}^2$ proizvoljni. Tada

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

gdje su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$, pa je

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}.$$

Imamo

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \\ \frac{-5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{6}{7}x_2 \\ \frac{-5}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \\ \frac{-5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 + \frac{6}{7}y_2 \\ \frac{-5}{6}y_1 + \frac{2}{3}y_2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\begin{array}{cl}
 & d(f(x), f(y)) \\
= & \{|(\frac{1}{2}x_1 + \frac{6}{7}x_2) - (\frac{1}{2}y_1 + \frac{6}{7}y_2)|^2 + |(\frac{-5}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2) - (\frac{-5}{6}y_1 + \frac{2}{3}y_2)|^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \{|\frac{1}{2}(x_1 - y_1) + \frac{6}{7}(x_2 - y_2)|^2 + |\frac{-5}{6}(x_1 - y_1) + \frac{2}{3}(x_2 - y_2)|^2\}^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \{(|\frac{1}{2}(x_1 - y_1)| + |\frac{6}{7}(x_2 - y_2)|)^2 + (|\frac{-5}{6}(x_1 - y_1)| + |\frac{2}{3}(x_2 - y_2)|)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq} & \{(\sqrt{|\frac{1}{2}|^2 + |\frac{6}{7}|^2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2})^2 \\
 & +(\sqrt{|\frac{-5}{6}|^2 + |\frac{2}{3}|^2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|})^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \{(|\frac{1}{2}|^2 + |\frac{6}{7}|^2)(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2) \\
 & +(|\frac{5}{6}|^2 + |\frac{2}{3}|^2)(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)\}^{\frac{1}{2}} \\
= & \sqrt{(|\frac{1}{2}|^2 + |\frac{6}{7}|^2 + |\frac{5}{6}|^2 + |\frac{2}{3}|^2)(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)} \\
= & \sqrt{|\frac{1}{2}|^2 + |\frac{6}{7}|^2 + |\frac{5}{6}|^2 + |\frac{2}{3}|^2}\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \\
= & \frac{\sqrt{3746}}{42} d(x,y)
\end{array}$$

(Hölderova nejednakost primjenjena je dva puta, i to prvi put na

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{2}, & b_1 = x_1 - y_1 \\ a_2 = \frac{6}{7}, & b_2 = x_2 - y_2, \end{array}$$

a drugi put na

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{-5}{6}, & b_1 = x_1 - y_1 \\ a_2 = \frac{2}{3}, & b_2 = x_2 - y_2. \end{array}$$

) Medjutim, $\frac{\sqrt{3746}}{42} > 1$. Još uvijek nam nije poznato da li ipak postoji konstanta $q \in [0, 1)$ sa željenim svojstvom, no prethodno razmatranje nas navodi na pokušaj pronalaska kontraprimjera, tj. primjera kada će vrijediti

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad (x \neq y),$$

što bi nas uvjerilo da ne može postojati konstanta $q \in [0, 1)$ tako da uvijek vrijedi $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$. Zaista, posmatramo li vektore

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lako se izračuna da

$$d(x, y) = \sqrt{2}, \quad d(f(x), f(y)) = \sqrt{\frac{233}{98}},$$

pa f nije kontrakcija.

d. [ADEMIR HUJDUROVIĆ] Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada imamo

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\ &= |\sin x - \sin y| \\ &= |2 \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2}| \\ &= 2|\cos \tfrac{x+y}{2}||\sin \tfrac{x-y}{2}| \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot |\tfrac{x-y}{2}| \\ &= |x - y| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

Medjutim, iz posljednjeg ipak ne možemo zaključiti da je f kontrakcija, jer nismo utvrdili postojanje kontraktivne konstante $q \in [0, 1)$ (o njenoj važnosti biti će govora u sljedećoj primjedbi i primjerima, ali i sekcijama). No, prethodno tumačenje ipak nas navodi na zaključak da bi vjerovatno mogli pronaći neke $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \neq y)$ tako da vrijedi jednakost $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, čime bi utvrdili da sigurno ne postoji

$q \in [0,1)$ tako da uvijek vrijedi $d(f(x), f(y)) \leq qd(x,y)$, tj. utvrdili bi da f nije kontrakcija. Kako bi navedena jednakost zaista vrijedila, moralo bi biti

$$|\cos\frac{x+y}{2}| = 1 \quad \wedge \quad |\sin\frac{x-y}{2}| = |\frac{x-y}{2}|.$$

Od ranije je poznato da za sve $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vrijedi

$$\sin\alpha \leq \alpha.$$

Navedenu činjenicu smo ustvari već i koristili u prvobitnom razmatranju, a pokazuje se posmatranjem pomoćne funkcije $g(x) = x - \sin x$ koja je očito rastuća na $[0, \frac{\pi}{2}]$ (jer $g'(x) \geq 0$), pa

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 \quad & \Rightarrow g(\alpha) \geq g(0) \\ & \Leftrightarrow \alpha - \sin\alpha \geq 0 - \sin 0 \\ & \Leftrightarrow \alpha \geq \sin\alpha \end{aligned}$$

Da bi vrijedilo $\sin\alpha = \alpha$, moralo bi biti $\alpha = 0$, odnosno u našem slučaju moralo bi vrijediti $\frac{x-y}{2} = 0$. Medjutim, tada bi imali $x = y$, što nam nije od pomoći jer tada za sve realne brojeve q vrijedi $d(f(x), f(y)) \leq qd(x,y)$. No, prisjetimo se takodjer i da vrijedi

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1,$$

pa bi za $x, y \in \mathbb{R}$ takve da $\frac{x-y}{2} \to 0$ imali da

$$\sin\frac{x-y}{2} \to \frac{x-y}{2}.$$

Da bi vrijedila i druga potrebna nejednakost

$$|\cos\frac{x+y}{2}| = 1,$$

izaberimo $x \in \mathbb{R}^+$ proizvoljan broj blizak nuli, i $y = -x$. Tada imamo

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \quad & = |f(x) - f(y)| \\ & = |\sin x - \sin y| \\ & = 2|\cos\tfrac{x+y}{2}||\sin\tfrac{x-y}{2}| \\ & = 2 \cdot 1 \cdot \sin\tfrac{x-y}{2} \\ & \to 2\tfrac{x-y}{2} \\ & = |x-y| \\ & = d(x,y), \end{aligned}$$

što bi povlačilo da $q \geq 1$, pa f nije kontrakcija. Primjetite da bi nam navedena ideja, tj. dokazivanje da

$$d(f(x), f(y)) \to d(x, y) \quad (x \to x_0, y \to y_0)$$

u različitim zadacima mogla biti od koristi ukoliko želimo pokazati da preslikavanje f nije kontraktivno.

▲

Primjedba 1.4.1 *Studentima se preporučuje posebno pažljivo tumačenje definicije kontrakcije, kako bi se u potpunosti shvatio značaj konstante $q \in [0, 1)$. Naime, činjenica*

$$(\forall x, y \in X, x \neq y): \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

ne implicira kontraktivnost preslikavanja f (pogledati sljedeći primjer)! Svakako vrijedi

$$(\forall x, y \in X)(\exists q = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \in [0, 1)): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y),$$

medjutim q ovdje zavisi od x, y, tj. $q = q(x, y)$. (Za par x_1, y_1 imali bi neki q_1, za par x_2, y_2 neki q_2, itd.) Ali, ne može se pokazati da tada postoji univerzalna konstanta q iz definicije kontrakcije, tj. f ne mora biti kontrakcija. Navedeno objašnjenje samo je još jedan podsjetnik na esencijalnu razliku izmedju "$\forall\exists$" i "$\exists\forall$", što je studentima zasigurno već poznato iz matematičke logike, a vjerovatno i same intuicije.

Teorem 1.4.1 (BANACHOV STAV O FIKSNOJ TAČKI) *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, i $A : X \to X$ kontraktivno preslikavanje. Tada postoji tačno jedna fiksna tačka preslikavanja A.*

ZADATAK 1.4.3 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Pokazati da Banachov stav ne važi ako preslikavanje $f : X \to X$ ispunjava uslov:*

$$(\forall x, y \in X, x \neq y): \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Rješenje: Posmatrajmo preslikavanje $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ definirano sa

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Jasno je da je prostor $[1, +\infty)$ kompletan, a uočimo da zaista vrijedi i

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\ &= |x + \tfrac{1}{x} - (y + \tfrac{1}{y})| \\ &= |x - y + \tfrac{y-x}{xy}| \\ &= |(x - y)(1 - \tfrac{1}{xy})| \\ &= |x - y||1 - \tfrac{1}{xy}| \\ &< |x - y| \end{aligned}$$

Medjutim,

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x + \tfrac{1}{x} = x \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

pa f nema fiksnu tačku. Dakle, Banachov stav ne važi iako je zadovoljena navedena osobina. ▲

Primjetimo i da su uslovi iz Banachovog stava o fiksnoj tački dovoljni, ali ne i potrebni za egzistenciju (i jedinstvenost) fiksne tačke. To možemo uočiti u sljedećem primjeru.

ZADATAK 1.4.4 *Da li preslikavanje* $f(x) = x^2$ *ima fiksnu tačku na* $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$?

Rješenje: Po definiciji, x je fiksna tačka preslikavanja f ako vrijedi $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Kako je $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, f ima jedinstvenu fiksnu tačku $x = 1$. Medjutim, lako se uvjeravamo da uslovi Banachovog stava o fiksnoj tački nisu zadovoljeni. $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ jeste kompletan, ali ne vrijedi $f : A \to A$. Naime, na skupu A preslikavanje je monotono rastuće, a kako je i neprekidno vrijedi

$$f(A) = f([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]) = [f(\frac{1}{2}), f(\frac{3}{2})] = [\frac{1}{4}, \frac{4}{9}] \nsubseteq [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}].$$

(Stoga je obavezno uvijek provjeriti da zaista $f : X \to X$!) Možemo primjetiti da takodjer preslikavanje f nije ni kontraktivno, jer

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = |x + y||x - y|,$$

što nas navodi na mnoštvo kontraprimjera, poput

$$(\exists x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}): \quad 2 = d(f(x), f(y)) > d(x, y) = 1.$$

Dakle, nisu zadovoljeni uslovi iz Banachovog stava, ali f ima jedinstvenu fiksnu tačku, pa zaključujemo da su uslovi Banachovog stava dovoljni, ali ne i potrebni za egzistenciju jedinstvene fiksne tačke. ▲

Nakon detaljnijeg tumačenja Banachovog stava o fiksnoj tački možemo prijeći na samu primjenu istog. Banachov stav ima primjenu u dokazivanju egzistencije i jedinstvenosti rješenja različitih jednačina ili sistema jednačina, te dokazivanju konvergencije nizova, u što se možemo uvjeriti kroz sljedeće zadatke.

ZADATAK 1.4.5 *Koristeći Banachov stav, pokazati da jednačina*

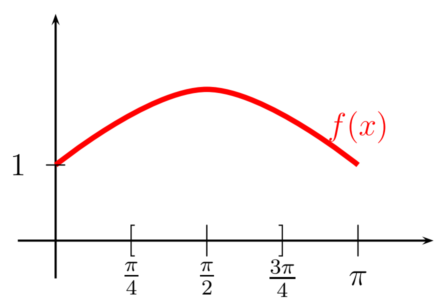
$$\sin x - x + 1 = 0$$

ima jedinstveno rješenje u $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Rješenje: Definirajmo preslikavanje

$$f(x) = \sin x + 1$$

Pokažimo da f ima jedinstvenu tačku na $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, i to će biti rješenje posmatrane jednačine.



Na intervalu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ preslikavanje f je neprekidno i monotono rastuće, pa

$$f([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{2})] = [\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, 2].$$

Na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ preslikavanje f je neprekidno i monotono opadajuće, pa

$$f([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]) = [f(\frac{3\pi}{4}), f(\frac{\pi}{2})] = [\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, 2].$$

Dakle, vrijedi

$$f([\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]) = [\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, 2] \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}],$$

a $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ je kompletan. Provjerimo da li je f kontrakcija.

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \quad &= |f(x) - f(y)| \\ &= |\sin x + 1 - \sin y - 1| \\ &= |\sin x - \sin y| \\ &= |2 \sin \tfrac{x-y}{2} \cos \tfrac{x+y}{2}| \\ &= 2|\sin \tfrac{x-y}{2}||\cos \tfrac{x+y}{2}| \\ &\leq 2|\tfrac{x-y}{2}||\cos \tfrac{x+y}{2}| \end{aligned}$$

$x, y \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, pa $\frac{x+y}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$, te

$$|\cos \frac{x+y}{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \quad &\leq 2|\tfrac{x-y}{2}||\cos \tfrac{x+y}{2}| \\ &\leq |x-y|\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} d(x, y), \end{aligned}$$

odakle slijedi da

$$(\exists q = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,1))(\forall x, y \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]) : \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y).$$

Dakle, f je kontrakcija, pa na osnovu Banachovog stava f ima jedinstvenu fiksnu tačku, tj.

$$\begin{aligned} &(\exists! x_0 \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}]) : \quad f(x_0) = x_0 \\ \Leftrightarrow \ &(\exists! x_0 \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}]) : \quad \sin x_0 + 1 = x_0 \\ \Leftrightarrow \ &(\exists! x_0 \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}]) : \quad \sin x_0 - x_0 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Time je pokazana jedinstvenost rješenja posmatrane jednačine. ▲

ZADATAK 1.4.6 *Posmatrajmo metrički prostor $(\mathcal{C}[a,b], d)$, pri čemu je d uobičajena metrika. Neka je $h \in \mathcal{C}[a,b]$, i neka je $b-a<1$. Dokazati da tada vrijedi:*

a. *Preslikavanje $F : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ je kontrakcija, gdje je*

$$F(g)(x) = h(x) + \int_a^x g(t)dt.$$

Šta je fiksna tačka od F?

b. *Nula funkcija je jedini element iz $\mathcal{C}[0,1]$ takav da je*

$$5f(x) = \int_0^x sin(x-t)f(t)dt.$$

Rješenje:

a. Neka su $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ proizvoljne funkcije.

$$\begin{aligned}
d(F(f),F(g)) &= \sup_{x\in[a,b]} |F(f)(x) - F(g)(x)| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} |h(x) + \int_a^x f(t)dt - (h(x) + \int_a^x g(t)dt)| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} |\int_a^x [f(t)-g(t)]dt| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |f(t)-g(t)|dt \\
&= \int_a^b |f(t)-g(t)|dt \\
&= \int_a^b |(f-g)(t)|dt \\
&\overset{*}{=} |(f-g)(t_0)|(b-a) \\
&= (b-a)|f(t_0)-g(t_0)| \\
&\le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \\
&= (b-a)d(f,g)
\end{aligned}$$

((*) podrazumijeva pozivanje na teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa.) Dakle,

$$(\exists q = b-a \in [0,1))(\forall f, g \in \mathcal{C}[a,b]) : \quad d(F(f),F(g)) \le qd(f,g),$$

pa je F zaista kontrakcija.
Odredimo i fiksne tačke preslikavanja F. Po definiciji, preslikavanje f je fiksna tačka od F ako vrijedi

$$\begin{aligned} F(f) = f \quad &\Leftrightarrow \quad F(f)(x) = f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad h(x) + \textstyle\int_a^x f(t)dt = f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad h'(x) + f(x) = f'(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f'(x) - f(x) = h'(x) \end{aligned}$$

Rješavanjem odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine dobijamo da je $f(x) = Ce^x$, pa je

$$\begin{aligned} &f(x) = C(x)e^x \\ &f'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x \end{aligned}$$

Početna diferencijalna jednačina sada ima oblik

$$\begin{aligned} &C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = h'(x) \\ &C'(x) = \tfrac{h'(x)}{e^x} \\ &C(x) = \textstyle\int \tfrac{h'(x)}{e^x} dx \end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = e^x \int \frac{h'(x)}{e^x} dx$ je fiksna tačka, a kako su zadovoljeni uslovi Banachovog stava, f je jedina fiksna tačka preslikavanja F.

b.

$$\begin{aligned} 5f(x) &= \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &= \tfrac{1}{5} \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

Definirajmo preslikavanje G na sljedeći način

$$G(f)(x) = \frac{1}{5} \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt.$$

Kako je integral neprekidne funkcije neprekidna funkcija, vrijedi $G : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$. Funkcija f rješenje je date integralne jednačine akko je f fiksna tačka preslikavanja G. $f(x) \equiv 0$ je očigledno rješenje integralne jednačine, pa je i fiksna tačka od G. Ukoliko pokažemo da je G kontrakcija, na osnovu Banachovog stava slijediti će da je $f \equiv 0$ i jedina fiksna tačka od G, tj. da je to jedino rješenje polazne jednačine.

Posmatrajmo stoga proizvoljne $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$.

$$\begin{aligned}
d(G(f), G(g)) &= \sup_{x\in[a,b]} |G(f)(x) - G(g)(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |\frac{1}{5}\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt - \frac{1}{5}\int_0^x \sin(x-t)g(t)dt| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |\frac{1}{5}\int_0^x \sin(x-t)[f(t)-g(t)]dt| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{5}\int_0^x |\sin(x-t)||f(t)-g(t)|dt \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{5}\int_0^x |f(t)-g(t)|dt \\
&= \tfrac{1}{5}\int_0^1 |f(t)-g(t)|dt \\
&\stackrel{*}{=} \tfrac{1}{5}|(f-g)(t_0)|(1-0) \\
&= \tfrac{1}{5}|f(t_0)-g(t_0)| \\
&\leq \tfrac{1}{5}\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \\
&= \tfrac{1}{5}d(f,g)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(\exists q = \frac{1}{5} \in [0,1))(\forall f, g \in \mathcal{C}[0,1]) : \quad d(G(f), G(g)) \leq q d(f,g),$$

pa je $f = 0$ jedino rješenje date integralne jednačine.

▲

ZADATAK 1.4.7 *Koristeći Banachov stav, pokazati da sistem*

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \tfrac{1}{3}\xi_1 - \tfrac{1}{4}\xi_2 + \tfrac{1}{4}\xi_3 - 1 \\
\xi_2 &= -\tfrac{1}{2}\xi_1 - \tfrac{1}{3}\xi_2 + \tfrac{1}{4}\xi_3 - 2 \\
\xi_3 &= \tfrac{1}{5}\xi_1 - \tfrac{1}{3}\xi_2 + \tfrac{1}{4}\xi_3 - 2
\end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje.

Rješenje: Neka je

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tada je sa $f(x) = Ax + B$ definirano jedno preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a početni sistem jednačina ekvivalentan je matričnoj jednačini $x = f(x)$. Dakle, x je rješenje početnog sistema akko je x fiksna tačka preslikavanja f. Kako je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, i $\mathbb{R}^3$ kompletan prostor, na osnovu Banachovog stava o fiksnoj tački, da bi f imala jedinstvenu fiksnu tačku dovoljno je pokazati da je f kontrakcija, tj. da vrijedi

$$(\exists q \in [0,1))(\forall x, y \in X): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y).$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
f(x) = Ax + B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - 1 \\ \frac{-1}{2}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - 2 \\ \frac{1}{5}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - 2 \end{pmatrix}, \\
f(y) = Ay + B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\eta_1 - \frac{1}{4}\eta_2 + \frac{1}{4}\eta_3 - 1 \\ \frac{-1}{2}\eta_1 + \frac{1}{3}\eta_2 + \frac{1}{4}\eta_3 - 2 \\ \frac{1}{5}\eta_1 - \frac{1}{3}\eta_2 + \frac{1}{4}\eta_3 - 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

pa je

$$
\begin{aligned}
& d(f(x), f(y)) \\
= \ & [(\tfrac{1}{3}\xi_1 - \tfrac{1}{4}\xi_2 + \tfrac{1}{4}\xi_3 - 1 - \tfrac{1}{3}\eta_1 + \tfrac{1}{4}\eta_2 - \tfrac{1}{4}\eta_3 + 1)^2 \\
& + (\tfrac{-1}{2}\xi_1 + \tfrac{1}{3}\xi_2 + \tfrac{1}{4}\xi_3 - 2 + \tfrac{1}{2}\eta_1 - \tfrac{1}{3}\eta_2 - \tfrac{1}{4}\eta_3 + 2)^2 \\
& + (\tfrac{1}{5}\xi_1 - \tfrac{1}{3}\xi_2 + \tfrac{1}{4}\xi_3 - 2 - \tfrac{1}{5}\eta_1 + \tfrac{1}{3}\eta_2 - \tfrac{1}{4}\eta_3 + 2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
= \ & \{[\tfrac{1}{3}(\xi_1 - \eta_1) + \tfrac{1}{4}(\xi_2 - \eta_2) + \tfrac{1}{4}(\xi_3 - \eta_3)]^2 \\
& + [\tfrac{-1}{2}(\xi_1 - \eta_1) + \tfrac{1}{3}(\xi_2 - \eta_2) + \tfrac{1}{4}(\xi_3 - \eta_3)]^2 \\
& + [\tfrac{1}{5}(\xi_1 - \eta_1) + \tfrac{1}{3}(\xi_2 - \eta_2) + \tfrac{1}{4}(\xi_3 - \eta_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq} \ & \{[\sqrt{(\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^2}\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}]^2 \\
& + [\sqrt{(\tfrac{-1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2}\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}]^2 \\
& + [\sqrt{(\tfrac{1}{5})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2}\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= \ & \{[(\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^2][(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2] \\
& + [(\tfrac{-1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2][(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2] \\
& + [(\tfrac{1}{5})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2][(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2]\}^{\frac{1}{2}} \\
= \ & \sqrt{(\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{-1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{5})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2} \\
& \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2} \\
= \ & \sqrt{\tfrac{131}{150}}d(x, y)
\end{aligned}
$$

Dakle, preslikavanje f ima jedinstvenu fiksnu tačku, odnosno dati sistem ima jedinstveno rješenje. ▲

ZADATAK 1.4.8 *Koristeći Banachov stav, naći uslov pod kojim sistem $n \times n$ ima jedinstveno rješenje u $\mathbb{R}^n$.*

Rješenje: Neka je dat sistem

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

Navedeni sistem ekvivalentan je sljedećem

$$
\begin{aligned}
& x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + b_1 \\
& x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - ... - a_{2n}x_n + b_2 \\
& \vdots \\
& x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1 - a_{nn})x_n + b_n
\end{aligned}
$$

Neka je sada

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada je sa $f(x) = Ax + B$ definirano jedno preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, a početni sistem jednačina ekvivalentan je matričnoj jednačini $x = f(x)$. Dakle, x je rješenje početnog sistema akko je x fiksna tačka preslikavanja f. Kako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, i $\mathbb{R}^n$ kompletan prostor, na osnovu Banachovog stava o fiksnoj tački, da bi f imala jedinstvenu fiksnu tačku dovoljno je pokazati da je f kontrakcija, tj. da vrijedi

$$(\exists q \in [0,1))(\forall x, y \in X) : \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y)$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Imamo

$$\begin{aligned} f(x) = Ax + B &= \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - ... - a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1-a_{nn})x_n + b_n \end{pmatrix}, \\ f(y) = Ay + B &= \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-a_{11})y_1 - a_{12}y_2 - ... - a_{1n}y_n + b_1 \\ -a_{21}y_1 + (1-a_{22})y_2 - ... - a_{2n}y_n + b_2 \\ \vdots \\ -a_{n1}y_1 - a_{n2}y_2 - ... + (1-a_{nn})y_n + b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pa je

$$
\begin{aligned}
& d(f(x), f(y)) \\
= \; & \{[(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\
& -(1-a_{11})y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n - b_1]^2 \\
& +[-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\
& +a_{21}y_1 - (1-a_{22})y_2 + \cdots + a_{2n}y_n - b_2]^2 \\
& + \dots \\
& +[-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n + b_n \\
& +a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots - (1-a_{nn})y_n - b_n]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= \; & \{[(1-a_{11})(x_1-y_1) - a_{12}(x_2-y_2) - \cdots - a_{1n}(x_n-y_n)]^2 \\
& +[-a_{21}(x_1-y_1) + (1-a_{22})(x_2-y_2) - \cdots - a_{2n}(x_n-y_n)]^2 \\
& + \dots \\
& +[-a_{n1}(x_1-y_1) - a_{n2}(x_2-y_2) - \cdots + (1-a_{nn})(x_n-y_n)]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq} \; & \{[\sqrt{(1-a_{11})^2 + (-a_{12})^2 + (-a_{1n})^2} \\
& \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}]^2 \\
& +[\sqrt{(-a_{21})^2 + (1-a_{22})^2 + \cdots + (-a_{2n})^2} \\
& \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}]^2 \\
& + \dots \\
& +[\sqrt{(-a_{n1})^2 + (-a_{n2})^2 + \cdots + (1-a_{nn})^2} \\
& \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= \; & \{[(1-a_{11})^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2][(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2] \\
& +[a_{21}^2 + (1-a_{22})^2 + \cdots + a_{2n}^2][(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2] \\
& + \dots \\
& +[a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + (1-a_{nn})^2][(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2]\}^{\frac{1}{2}} \\
= \; & \{(1-a_{11})^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + (1-a_{22})^2 + \cdots + a_{2n}^2 \\
& + \cdots + a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + (1-a_{nn})^2\}^{\frac{1}{2}} \\
& \{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
= \; & \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2}\, d(x,y),
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij},$$

gdje je

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Dakle, preslikavanje f je kontrakcija, odnosno početni sistem ima jedinstveno rješenje, ukoliko je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} < 1,$$

odnosno ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 < 1.$$

▲

ZADATAK 1.4.9 *Koristeći Banachov stav, pokazati da niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definiran sa:*

a. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4x_n+2}{x_n+3} \quad (n \in \mathbb{N})$

b. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n \in \mathbb{N})$

ima konačnu graničnu vrijednost.

Rješenje:

a. Posmatrajmo funkciju $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$$

f je monotono rastuća i neprekidna, pa

$$f([1, +\infty)) = [f(1), f(+\infty)) = [\frac{3}{2}, 4] \subset [1, +\infty)$$

Dakle, $f(A) \subseteq A$, i A je kompletan. Pokažimo i da je f kontrakcija

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\
&= |\tfrac{4x+2}{x+3} - \tfrac{4y+2}{y+3}| \\
&= |\tfrac{(y+3)(4x+2)-(x+3)(4y+2)}{(x+3)(y+3)}| \\
&= |\tfrac{4xy+2y+12x+6-4xy-2x-12y-6}{(x+3)(y+3)}| \\
&= |\tfrac{10x-10y}{(x+3)(y+3)}| \\
&= \tfrac{10}{(x+3)(y+3)}|x-y| \\
&\le \tfrac{10}{4\cdot 4}|x-y| \\
&= \tfrac{5}{8}|x-y|
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(\exists q = \frac{5}{8} \in [0,1))(\forall x, y \in X): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y),$$

pa je f kontrakcija. Zadovoljeni su uslovi Banachovog stava, pa f ima jedinstvenu fiksnu tačku $x_0 \in [1, +\infty)$. Jednostavno provjeravamo da su svi članovi niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A, pa

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= |x_n - x_0| \\ &= |f(x_{n-1}) - f(x_0)| \\ &\leq \tfrac{5}{8}|x_{n-1} - x_0| \\ &= \tfrac{5}{8}|f(x_{n-2}) - f(x_0)| \\ &\leq \tfrac{5}{8}\tfrac{5}{8}|x_{n-2} - x_0| \\ &= (\tfrac{5}{8})^2|f(x_{n-3}) - f(x_0)| \\ &\leq ... \\ &\leq (\tfrac{5}{8})^{n-1}|x_1 - x_0| \\ &\leq (\tfrac{5}{8})^{n-1}|1 - x_0| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$. Dobili smo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i $x_n \to x_0 \in A$ kad $n \to \infty$.

b. Posmatrajmo funkciju $f : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

f je monotono opadajuća i neprekidna, pa

$$f([\frac{1}{2}, 1]) = [f(1), f(\frac{1}{2})] = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset A$$

Dakle, $f(A) \subseteq A$, i A je kompletan. Pokažimo i da je f kontrakcija

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\ &= |\tfrac{1}{1+x} - \tfrac{1}{1+y}| \\ &= |\tfrac{1+y-1-x}{(1+x)(1+y)}| \\ &= \tfrac{1}{(1+x)(1+y)}|x - y| \\ &\leq \tfrac{2}{3}\tfrac{2}{3}|x - y| \\ &= \tfrac{4}{9}|x - y| \end{aligned}$$

Dakle,

$$(\exists q = \frac{4}{9} \in [0,1))(\forall x, y \in X): \quad d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y),$$

pa je f kontrakcija. Zadovoljeni su uslovi Banachovog stava, pa f ima jedinstvenu fiksnu tačku $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Jednostavno provjeravamo da su svi članovi niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A, pa

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= |x_n - x_0| \\ &= |f(x_{n-1}) - f(x_0)| \\ &\leq \tfrac{4}{9}|x_{n-1} - x_0| \\ &= \tfrac{4}{9}|f(x_{n-2}) - f(x_0)| \\ &\leq \tfrac{4}{9}\tfrac{4}{9}|x_{n-2} - x_0| \\ &= (\tfrac{4}{9})^2|f(x_{n-3}) - f(x_0)| \\ &\leq ... \\ &\leq (\tfrac{4}{9})^{n-1}|x_1 - x_0| \\ &\leq (\tfrac{4}{9})^{n-1}diam(A) \\ &= (\tfrac{4}{9})^{n-1}\tfrac{1}{2} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$. Dobili smo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i $x_n \to x_0 \in A$ kad $n \to \infty$.

▲

1.5 Separabilnost metričkih prostora

Definicija 1.5.1 (SVUDA GUST SKUP) *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $A \subseteq X$ je svuda gust u X ako je $\overline{A} = X$.*

Primjedba 1.5.1 *Drugačije rečeno, skup $A \subseteq X$ je svuda gust u X, ako se u svakoj okolini proizvoljne tačke $x \in X$ nalazi barem jedna tačka $y \in A$, tj. ako svaki $x \in X$ možemo dovoljno dobro aproksimirati nekim $y \in A$.*
Stoga, pri dokazivanju da je A svuda gust u X, koristimo bilo koji od navedenih pristupa.

Intuitivno, ako je A svuda gust skup u X, to znači da je A "gotovo jednak" cijelom skupu X, tj. da su elementi skupa A gusto rasporedjeni po skupu X.

ZADATAK 1.5.1 *Skup $\mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$.*

Rješenje: Rezultat je poznat iz Matematičke analize I jer je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Odnosno, poznato je da se u proizvoljnoj okolini svakog realnog broja nalazi racionalan broj. ▲

ZADATAK 1.5.2 *Skup polinoma nad $[a,b]$ je svuda gust u $\mathcal{C}[a,b]$.*

Rješenje: Neka je $f \in \mathcal{C}[a,b]$ proizvoljan. Na osnovu Taylorovog teorema, jasno je da postoji polinom koji dovoljno dobro aproksimira tu funkciju, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A): \quad d(f,a) = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - a(t)| < \varepsilon$$

($a(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$, za n dovoljno velik), a kako je i svaki polinom neprekidna funkcija, vrijedi $A \subseteq \mathcal{C}[a,b]$. Dakle, A je svuda gust u $\mathcal{C}[a,b]$. ▲

Definicija 1.5.2 (SEPARABILAN PROSTOR) *Neka je (X,d) metrički prostor. X je separabilan prostor ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup.*

Intuitivno, možemo shvatiti separabilne metričke prostore kao prostore koji nisu "ogromni". Naime, u takvom prostoru postoji prebrojiv skup koji je "gotovo jednak" cijelom prostoru.

ZADATAK 1.5.3 *Sljedeći metrički prostori su separabilni:*

a. $(\mathbb{R}, d)$

b. $(\mathbb{R}^n, d_p) \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$

c. $(\mathbb{R}^n, d_\infty) \quad (n \in \mathbb{N})$

d. $(\mathcal{C}[a,b], d)$

e. $(l_p, d_p) \quad (1 \leq p < \infty)$

f. (c, d)

g. (c_0, d)

Dokazati!

Rješenje:

a. Na osnovu ranijeg primjera, $\mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$, a kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv, $\mathbb{R}$ je separabilan.

b. Pokažimo da je $\mathbb{Q}^n$ svuda gust prebrojiv skup u $\mathbb{R}^n$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, i $\varepsilon > 0$. Na osnovu a., $\mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$, pa za sve $i \in \overline{1,n}$ vrijedi

$$(\exists q_i \in \mathbb{Q}) : \quad |x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}}$$

Uočimo li tačku $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n$, imamo

$$d_p(x, q) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Dakle, $\mathbb{Q}^n$ je svuda gust u $\mathbb{R}^n$, a kako je $\mathbb{Q}^n$ prebrojiv, $\mathbb{R}^n$ je separabilan.

c. Ponovno pokazujemo da je $\mathbb{Q}^n$ svuda gust prebrojiv skup u $\mathbb{R}^n$. Analogno kao slučaj b., za proizvoljne $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, i $\varepsilon > 0$ imamo

$$(\exists q_i \in \mathbb{Q}) : \quad |x_i - q_i| < \varepsilon$$

Uočimo li tačku $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n$, imamo

$$d_\infty(x, q) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - q_i| < \varepsilon$$

Dakle, $\mathbb{Q}^n$ je svuda gust u $\mathbb{R}^n$, a kako je $\mathbb{Q}^n$ prebrojiv, $\mathbb{R}^n$ je separabilan.

d. U prethodnom primjeru pokazali smo da je skup polinoma A svuda gust u $\mathcal{C}[a, b]$. Medjutim A nije prebrojiv skup, ali uzmemo li skup B polinoma sa racionalnim koeficijentima, jasno je da je B prebrojiv. Uvjerimo se da je i B svuda gust u $\mathcal{C}[a, b]$. Neka je $f \in \mathcal{C}[a, b]$ proizvoljan. Kao što je ranije navedeno, na osnovu Taylorovog teorema, jasno je da postoji polinom koji dovoljno dobro aproksimira tu funkciju, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) : \quad d(f, a) = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - a(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

($a(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, za n dovoljno velik) Koeficijenti $a_k \quad (k \in \overline{0, n})$ su realni brojevi, pa zbog a. vrijedi

$$(\forall k \in \overline{0, n})(\forall \varepsilon > 0)(\exists q_k \in \mathbb{Q}) : \quad |a_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)K},$$

pri čemu je K konstanta tako da $|t^k| \leq K \quad (t \in [a, b], k \in \overline{0, n})$ (postojanje takve konstante je trivijalno, jer je funkcija t^k neprekidna, pa je ograničena). Uočimo li sada polinom $b(t) = \sum_{k=0}^{n} q_k t^k$, imamo

$$\begin{aligned} d(f,b) &= \sup_{a\le t\le b} |f(t) - b(t)| \\ &= \sup_{a\le t\le b} |f(t) - a(t) + a(t) - b(t)| \\ &\le \sup_{a\le t\le b} [|f(t) - a(t)| + |a(t) - b(t)|] \\ &\le \sup_{a\le t\le b} |f(t) - a(t)| + \sup_{a\le t\le b} |a(t) - b(t)| \\ &= d(f,a) + \sup_{a\le t\le b} |\sum_{k=0}^{n} a_k t^k - \sum_{k=0}^{n} q_k t^k| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \sup_{a\le t\le b} |\sum_{k=0}^{n} (a_k - q_k) t^k| \\ &\le \tfrac{\varepsilon}{2} + \sup_{a\le t\le b} \sum_{k=0}^{n} |a_k - q_k||t^k| \\ &\le \tfrac{\varepsilon}{2} + \sup_{a\le t\le b} K \sum_{k=0}^{n} |a_k - q_k| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + K \tfrac{\varepsilon}{2K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$(\forall f \in \mathcal{C}[a,b])(\forall \varepsilon > 0)(\exists b \in B): \quad d(f,b) < \varepsilon,$$

tj. B je svuda gust u $\mathcal{C}[a,b]$. Kako je B prebrojiv, $\mathcal{C}[a,b]$ je separabilan. (Jednostavnije, za skup B mogli smo uzeti skup svih funkcija koje su linearne na segmentima sa racionalnim brojevima kao granicama tih segmenata, i u kojima su vrijednosti tih funkcija takodjer racionalne.)

e. Prvobitna ideja koja se nameće jeste da za traženi svuda gust prebrojiv skup A u l_p izaberemo skup svih racionalnih nizova u l_p. Medjutim, iako ovaj skup zaista jeste svuda gust u l_p, on nije prebrojiv. Stoga ćemo posmatrati skup $B \subset A$ nizova u l_p sa racionalnim članovima od kojih je samo konačno mnogo različito od nule, tj.

$$B = \{x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p | (\exists K > 0): \quad \xi_i = 0 \quad \forall i > K\}$$

Dokažimo da je B svuda gust u l_p. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$, i $\varepsilon > 0$. Kako je, na osnovu definicije prostora l_p, x p-sumabilan red, imamo

$$(\exists n \in \mathbb{N}): \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Svaki član ξ_i niza x je realan broj, pa na osnovu a. vrijedi

$$(\forall i \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists q_i \in \mathbb{Q}): \quad |\xi_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{(2n)^{\frac{1}{p}}}$$

Uočimo tačku $b = (b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, ...) = (q_1, q_2, ..., q_n, 0, 0, ...) \in B$. Tada je

$$\begin{aligned} d_p(x,b) &= (\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - q_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p)\frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_p(x,b)^p &= \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - q_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \\ &< \tfrac{\varepsilon^p}{2} + \tfrac{\varepsilon^p}{2} \\ &= \varepsilon^p, \end{aligned}$$

tj. $d_p(x,b) \leq \varepsilon$. Dakle, B je svuda gust u l_p, a kako je i prebrojiv, l_p je separabilan prostor.

f. Slično kao u prethodnim razmatranjima, jednostavno zaključujemo da je dobro posmatrati sljedeći skup

$$A = \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c| \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \quad a = (q_1, q_2, ..., q_n, q, q, q, ...)\},$$

pri čemu su $q, q_i \in \mathbb{Q}$, $(i \in \overline{1,n})$. Dokažimo da je A svuda gust u c. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c$, i $\varepsilon > 0$. Na osnovu definicije prostora c, x je konvergentan niz, pa vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i - \xi| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Dalje, kako je $\xi \in \mathbb{R}$, zbog a. imamo da vrijedi

$$(\exists q \in \mathbb{Q}): \quad |\xi - q| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Takodjer, svaki član ξ_i niza x je realan broj, pa na osnovu a. vrijedi

$$(\forall i \in \mathbb{N})(\exists q_i \in \mathbb{Q}): \quad |\xi_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uočimo tačku $a = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, ...) = (q_1, q_2, ..., q_{n_0}, q, q, q, ...) \in A$. Tada je

$$d(x,a) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - a_i|,$$

a jasno je da

$$|\xi_i - a_i| = \begin{cases} |\xi_i - q_i|, & i \leq n_0 \\ |\xi_i - q|, & i > n_0. \end{cases}$$

Medjutim, zbog svega izloženog imamo

$$(\forall i \in \mathbb{N}): \quad |\xi_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

te

$$\begin{aligned} |\xi_i - q| &= |\xi_i - \xi + \xi - q| \\ &\leq |\xi_i - \xi| + |\xi - q| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} \\ &= \tfrac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

za sve $i > n_0$. Dakle, imamo da zaista vrijedi

$$d(x, a) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - a_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

odnosno A je svuda gust u c. Kako je A prebrojiv, c je separabilan prostor.

g. Posmatrajmo skup A definiran sa

$$A = \{a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0 | \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \quad a = (q_1, q_2, ..., q_n, 0, 0, 0, ...)\},$$

pri čemu su $q_i \in \mathbb{Q}$, $(i \in \overline{1, n})$. Dokažimo da je A svuda gust u c_0. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0$, i $\varepsilon > 0$. Na osnovu definicije prostora c_0, x konvergira ka nuli, pa vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow |\xi_i - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Svaki član ξ_i niza x je realan broj, pa na osnovu a. vrijedi

$$(\forall i \in \mathbb{N})(\exists q_i \in \mathbb{Q}): \quad |\xi_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uočimo tačku $a = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, ...) = (q_1, q_2, ..., q_{n_0}, 0, 0, 0, ...) \in A$. Tada je

$$d(x, a) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - a_i|,$$

a jasno je da

$$|\xi_i - a_i| = \begin{cases} |\xi_i - q_i|, & i \leq n_0 \\ |\xi_i|, & i > n_0. \end{cases}$$

Medjutim, zbog svega izloženog imamo

$$(\forall i \in \mathbb{N}): \quad |\xi_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

te

$$(\forall i \in \mathbb{N}): \quad i > n_0 \Rightarrow |\xi_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle, imamo da zaista vrijedi

$$d(x,a) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - a_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

odnosno A je svuda gust u c. Kako je A prebrojiv, c je separabilan prostor.

▲

Nešto je teže, ali ponovno i značajnije dokazati da odredjeni prostori nisu separabilni.

ZADATAK 1.5.4 *Sljedeći metrički prostori nisu separabilni:*

a. l_∞

b. $\mathcal{B}[a,b]$

Rješenje:

a. Uočimo skup $A \subset l_\infty$ nizova čiji su članovi isključivo brojevi 0 ili 1,tj.

$$A = \{x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty | (\forall i \in \mathbb{N}): \quad \xi_i \in \{0,1\}\}$$

Jasno je da vrijedi $k(A) = c$, te

$$(\forall x, y \in A, x \neq y): \quad d_\infty(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| = 1.$$

Trebamo pokazati da l_∞ nije separabilan, tj. da ne postoji prebrojiv svuda gust skup u l_∞. Pretpostavimo stoga da je B neki svuda gust skup u l_2, te dokažimo da B ne može biti prebrojiv. B je svuda gust, pa u proizvoljnoj okolini svakog elementa $x \in l_\infty$ mora postojati barem jedna tačka $b \in B$. Tim prije, u proizvoljnoj okolini svakog elementa $a \in A$ mora postojati barem jedna tačka $b \in B$. Uzmemo li konkretno $\varepsilon = \frac{1}{3}$, u svakoj otvorenoj kugli $B(a, \frac{1}{3})$, $a \in A$ mora postojati barem jedan $b \in B$. Medjutim, zbog navedene činjenice da za sve medjusobno različite elemente $x, y \in A$ vrijedi

$$d_\infty(x, y) = 1,$$

familija kugli $\{B(a, \frac{1}{3}) | a \in A\}$ je disjunktna, što bi onda značilo da B mora imati barem onoliko tačaka koliko ima ovakvih kugli, tj. $k(B) \geq k(A) = c$, tj. B ne može biti prebrojiv. Dakle, l_∞ nije separabilan.

b. Dokaz je analogan kao pod a. Uočimo kolekciju ograničenih funkcija koje uzimaju samo vrijednosti 0 i 1, tj.

$$A = \{f \in \mathcal{B}[a, b] | (\forall t \in [a, b]) : \quad f(t) \in \{0, 1\}\}$$

Jasno je da vrijedi $k(A) \geq c$, te

$$(\forall f, g \in A, f \neq g) : \quad d(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| = 1.$$

Trebamo pokazati da $\mathcal{B}[a, b]$ nije separabilan, tj. da ne postoji prebrojiv svuda gust skup u $\mathcal{B}[a, b]$. Pretpostavimo stoga da je B neki svuda gust skup u $\mathcal{B}[a, b]$, te dokažimo da B ne može biti prebrojiv. B je svuda gust, pa u proizvoljnoj okolini svakog elementa $f \in \mathcal{B}[a, b]$ mora postojati barem jedna tačka $b \in B$. Tim prije, u proizvoljnoj okolini svakog elementa $a \in A$ mora postojati barem jedna tačka $b \in B$. Uzmemo li konkretno $\varepsilon = \frac{1}{3}$, u svakoj otvorenoj kugli $B(a, \frac{1}{3})$, $a \in A$ mora postojati barem jedan $b \in B$. Medjutim, zbog navedene činjenice da za sve medjusobno različite elemente $f, g \in A$ vrijedi

$$d(f, g) = 1,$$

familija kugli $\{B(a, \frac{1}{3}) | a \in A\}$ je disjunktna, što bi onda značilo da B mora imati barem onoliko tačaka koliko ima ovakvih kugli, tj. $k(B) \geq k(A) \geq c$, tj. B ne može biti prebrojiv. Dakle, $\mathcal{B}[a, b]$ nije separabilan.

▲

ZADATAK 1.5.5 *Diskretan metrički prostor je separabilan akko je prebrojiv.*

Rješenje:

⇒) Neka je X separabilan diskretan metrički prostor. Na osnovu definicije separabilnosti, postoji skup $A \subseteq X$ koji je prebrojiv i svuda gust u X. Dakle, u proizvoljnoj okolini svakog $x \in X$ postoji element $a \in A$ tako da vrijedi

$$d(x, a) < \varepsilon$$

Tako, izaberemo li konkretno $\varepsilon = \frac{1}{2}$, u svakoj kugli $B(x, \frac{1}{2})$ postoji element $a \in A$ takav da

$$d(x, a) < \varepsilon,$$

pa zbog definicije diskretne metrike mora vrijediti $a = x$. Dakle, moguće je da je A svuda gust u X samo ako $A = X$. Kako je A prebrojiv, prebrojiv je i X.

⇐) Neka je X prebrojiv diskretan metrički prostor. Jasno je da je X separabilan, jer postoji X svuda gust prebrojiv skup u X.

▲

Separabilni prostori su oni u kojima postoji najviše prebrojiv svuda gust skup. Kao što se može vidjeti iz prethodnih zadataka, da bi se uvjerili da je odredjeni skup A svuda gust u X rijetko to dokazujemo po definiciji svuda gustog skupa, jer je često pronalaženje zatvorenja odredjenih skupova mukotrpan zadatak. Tu smo činjenicu do sada uvijek dokazivali oslanjajući se na primjedbu koja je uslijedila odmah nakon definicije, gdje je navedeno da je $A \subseteq X$ svuda gust u X akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists y \in A): \quad d(x, y) < \varepsilon.$$

Medjutim, ponekad je mnogo lakše u potpunosti izbjeći traženje takvog skupa A, kao i samo dokazivanje da je izabrani skup A zaista najviše prebrojiv i svuda gust u X. To nam omogućava sljedeći teorem.

Teorem 1.5.1 (KARAKTERIZACIJA SEPARABILNIH PROSTORA) *Neka je (X, d) metrički prostor. X je separabilan prostor akko u njemu postoji najviše prebrojiva baza.*

ZADATAK 1.5.6 *Podprostor separabilnog metričkog prostora je i sam separabilan.*

Rješenje: Neka je X separabilan metrički prostor, i $M \subseteq X$. Na osnovu prethodnog teorema, X ima najviše prebrojivu bazu, neka je to familija skupova $\{B_i\}_{i\in I}$, (I najviše prebrojiv skup). Skupovi B_i su, po definiciji baze, otvoreni u X, pa su na osnovu definicije relativne topologije skupovi $B_i \cap M$ otvoreni u M. Dokažimo da je familija $\{B_i \cap M\}_{i\in I}$ baza prostora M. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan otvoren skup $O \subseteq M$. Tada je

$$O = U \cap M, \quad U \text{ je otvoren u } X.$$

Kako je $\{B_i\}_{i\in I}$ baza za X, onda

$$U = \bigcup_{i\in J} B_i \quad (J \subseteq I),$$

pa je

$$O = U \cap M = (\bigcup_{i\in J} B_i) \cap M = \bigcup_{i\in J} (B_i \cap M) \quad (J \subseteq I).$$

Dakle, zaista je $\{B_i \cap M\}_{i\in I}$ familija za M, a kako je I najviše prebrojiv, M je separabilan (na osnovu prethodnog teorema.)
Medjutim, dokazivanje separabilnosti prostora M preko nalaženja svuda gustog skupa u M (kao što smo to radili ranije u svim zadacima), bio bi znatno teži zadatak. Naime, kako je X separabilan, u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup A. Prvobitna ideja jeste posmatrati isti skup A kao onaj koji je najviše prebrojiv svuda gust u M, no to ne mora biti slučaj. Kako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists y \in A): \quad d(x, y) < \varepsilon,$$

tim je prije onda zadovoljeno i

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists y \in A): \quad d(x, y) < \varepsilon,$$

ali ne mora biti $A \subseteq M$, što bi dalje značilo da A nije svuda gust u M (tada sigurno neće biti $\overline{A} = M$.) Stoga bi sljedeća ideja bila posmatrati skup $A \cap M$ kao onaj koji je najviše prebrojiv svuda gust u M, medjutim to takodjer ne mora biti slučaj. Naime, može se desiti da su čak sve tačke skupa A one koje nisu u M. Uvjerimo se u to kroz jednostavan primjer: $M = \mathbb{I}$ je podprostor prostora $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$, ali $A \cap M = \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, pa $\emptyset$ očito nije svuda gust u $\mathbb{I}$. Da bi zaista eksplicitno definirali skup B koji će biti svuda gust u M bilo bi neophodno posmatrati sve tačke iz A koje imaju neprazne okoline sa M, no takvi detalji nam ovdje nisu od značaja, pa ćemo taj dokaz izostaviti. ▲

ZADATAK 1.5.7 *Ako je (X, d) separabilan metrički prostor, onda je $k(X) \leq c$. Dokazati!*

Rješenje: Neka je X separabilan prostor, i A prebrojiv svuda gust skup u X. Ako dokažemo da postoji sirjekcija $f : B \to X$, za neki skup B takav da $k(B) \leq c$, onda će vrijediti $k(X) \leq k(B) = c$. Posmatrajmo skup B svih konvergentnih nizova čiji su članovi u A, te definirajmo preslikavanje $f : B \to X$ na sljedeći način

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_0, \text{ pri čemu je } x_0 \text{ granica niza } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Kako je A svuda gust u X, vrijedi $\overline{A} = X$, pa je $f(B) = X$, tj. f je sirjekcija. Jasno je da je $k(B) \leq c$ (zašto?), pa je time dokaz završen. (Tvrdnju smo mogli dokazati i definiranjem injekcije $g : X \to C$, za neki skup C takav da $k(C) \leq c$. Da bi naveli primjer jednog takvog preslikavanja, posmatrajmo skup D svih otvorenih kugli $B(x_i, \frac{1}{j})$ gdje su $x_i \in A$, $i, j \in \mathbb{N}$. Kako ovakvih kugli ima najviše prebrojivo mnogo, možemo pisati $D = \{B_1, B_2, ..., B_n, ...\}$. Neka je $C = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Konačno, definirajmo preslikavanje $g : X \to C$ sa $g(x) = \{n \in \mathbb{N} | x \in B_n\}$. g je očito injekcija, pa $k(X) \leq k(C) = 2^{\aleph_0} = c$.) ▲

Prethodni zadatak još jednom nam potvrdjuje da separabilni prostori nisu "ogromni".

1.6 Kompaktnost metričkih prostora

Prvo ćemo navesti sve definicije i teoreme koje ćemo koristiti u ovoj sekciji.

Definicija 1.6.1 (KOMPAKTAN PROSTOR) *Neka je (X, d) metrički prostor. X je kompaktan prostor ako se iz svakog njegovog niza može izdvojiti konvergentan podniz.*

Definicija 1.6.2 (RELATIVNO KOMPAKTAN PROSTOR) *Neka je (X, d) metrički prostor, i $M \subseteq X$. M je relativno kompaktan skup ako se iz svakog niza u M može izdvojiti konvergentan podniz u X. Ako je $x_0 \in M$, kažemo da je M kompaktan skup.*

Dakle, relativna kompaktnost i zatvorenost ekvivalente su kompaktnosti.

Definicija 1.6.3 (ε-MREŽA) *Neka je (X, d) metrički prostor, $N, M \subseteq X$, i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. N je ε-mreža skupa M ako vrijedi*

$$(\forall x \in M)(\exists y \in N) : \quad d(x, y) < \varepsilon.$$

Teorem 1.6.1 *Skup N je ε-mreža skupa M akko $M \subseteq \bigcup_{x\in N} B(x, \varepsilon)$.*

Teorem 1.6.2 *Neka je (X, d) metrički prostor, i $M \subseteq X$.*

a. M je relativno kompaktan
$\Rightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N$ *ε-mreža skupa* $M) : \quad N$ *konačna.*

b. X kompletan, $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \varepsilon$*-mreža skupa* $M) : \quad N$ *konačna*
$\Rightarrow \quad M$ *je relativno kompaktan.*

Navedene definicije i teoreme daju nam uvid u intuitivno shvatanje pojma kompaktnosti kao neke generalizaciju pojma konačnosti. Tu i leži moć kompaktnosti: pruža nam konačnu strukturu za beskonačne skupove. U mnogim problemima gdje konačnost u potpunosti olakšava situaciju (poput npr. optimizacijskih problema), isto čini i kompaktnost.

Prvo ćemo uspostaviti vezu izmedju novouvedenog pojma kompaktnosti sa onim iz ranijih sekcija. Naprimjer, kako separabilnost intuitivno shvatamo kao generalizaciju prebrojivosti, a kompaktnost kao generalizaciju konačnosti, pretpostavljamo da je kompaktnost uslov jači od separabilnosti. Pokažimo to eksplicitno. (Svi dokazi nalaze se i u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)", no zbog njihove važnosti navesti ćemo ih i ovdje.)

ZADATAK 1.6.1 *Svaki kompaktan metrički prostor je:*

a. kompletan

b. separabilan

c. zatvoren i ograničen

Dokazati!

Rješenje: Neka je X kompaktan metrički prostor.

a. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u X. Zbog kompaktnosti skupa X, postoji konvergentan podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ početnog niza, tj.

$$x_{n_k} \to x_0 \in X \quad (k \to \infty).$$

Sada imamo

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)$$

Prvi sabirak sa desne strane možemo učiniti proizvoljno malim jer je početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, a drugi jer podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x_0. Dakle, početni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $x_0 \in X$, pa je X kompletan.

b. Kako je X kompaktan, onda vrijedi

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \ \varepsilon\text{-mreža skupaa } X): \quad N_\varepsilon \text{ konačna} \\ \Rightarrow \ & (\forall n \in \mathbb{N})(\exists N_n \ \tfrac{1}{n}\text{-mreža skupa } x): \quad N_n \text{ konačna.} \end{aligned}$$

Posmatrajmo skup

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n. \subseteq X.$$

Jasno je da je A najviše prebrojiv skup (kao prebrojiva unija konačnih skupova). Pokažimo i da je A svuda gust u X. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x \in X$, i $\varepsilon > 0$. Tada postoji dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{1}{n} < \varepsilon$, pa imamo

$$(\exists y \in N_n \subseteq A): \quad d(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Time je dokaz završen.

c. Da bi pokazali da je X zatvoren, dovoljno je pokazati da za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u X za koji $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$, vrijedi $x_0 \in X$. Posmatramo li stoga proizvoljan niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u X, $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$, zbog kompaktnosti skupa X postoji podniz $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ takav da

$$x_{n_k} \to x_1 \quad (k \to \infty), \text{ i } x_1 \in X.$$

Medjutim, kako je granica niza jedinstvena, vrijedi $x_1 = x_0$, pa $x_0 \in X$. Dokažimo ograničenost skupa X. Ako je $X = \emptyset$, ograničenost je očigledna, pa posmatrajmo slučaj $X \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da X nije ograničen. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljan. Kako X nije ograničen, onda X nije sadržan u kugli $B(x_0, 1)$, pa

$$(\exists x_1 \in X): \quad x_1 \notin B(x_0, 1),$$

tj.

$$(\exists x_1 \in X): \quad d(x_0, x_1) \geq 1.$$

Dalje, kako X nije ograničen, X nije sadržan u kugli $B(x_0, 1+d(x_0, x_1))$, pa

$$(\exists x_2 \in X): \quad d(x_0, x_2) \geq 1 + d(x_0, x_1).$$

Kako imamo $1 + d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)$, vrijedi $d(x_1, x_2) \geq 1$. Ovaj postupak možemo nastaviti dobijajući niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za koji vrijedi

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}): \quad d(x_n, x_m) \geq 1.$$

Jasno je da se iz ovakvog niza ne može izdvojiti nijedan konvergentan podniz, pa X nije kompaktan. Dakle, suprotna pretpostavka ne može važiti, pa je X ograničen.

▲

U Matematičkoj analizi I spominjali smo karakterizaciju kompaktnih skupova u obliku Heine-Borel-ovog teorema koji kaže da je skup A kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. No, pogrešno je pretpostaviti da navedeno vrijedi uvijek! Naime, u Matematičkoj analizi I radili smo isključivo u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, pa HB teorem vrijedi za skup $A \subseteq \mathbb{R}$. Štaviše, vrijedi

Teorem 1.6.3 (HEINE-BOREL) *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*

Medjutim, svojstvo kompaktnosti nije jednako kombinaciji zatvorenosti i ograničenosti. U posljednjem zadatku mogli smo se uvjeriti da kompaktnost u proizvoljnom metričkom prostoru povlači zatvorenost i ograničenost. No, obrat ne vrijedi u proizvoljnom metričkom prostoru, u što se možemo uvjeriti i kroz sljedeći primjer.

ZADATAK 1.6.2 *Dokazati da je skup A zatvoren i ograničen u (X, d), ali da nije kompaktan, ako je:*

a. *X proizvoljan beskonačan skup, d diskretna metrika; $A = X$*

b. $X = \mathbb{Q}$, $d(p, q) = |p - q|$; $A = \{p \in \mathbb{Q} : \quad 2 < p^2 < 3\}$

c. $X = (0, 1)$, *d Euklidska metrika;* $A = (0, 1)$

d. $X = l_2$, $d = d_2$; $A = \{e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) | \quad i \in \mathbb{N}\}$

Rješenje:

a. Kako je $A = K(x_0, 2)$, jasno je da je A zatvoren i ograničen u X. Zbog beskonačnosti skupa $A = X$, u A postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu se svi članovi niza medjusobno različiti. Tada vrijedi

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad d(x_m, x_n) = 1,$$

pa je nemoguće izdvojiti konvergentan podniz ovakvog niza. Dakle, A nije kompaktan.

b. Metrika definirana na skupu X je metrika indukovana Euklidskom metrikom na $\mathbb{R}$, pa je po definiciji A zatvoren u X ako se može napisati kao $A = B \cap X$, pri čemu je B zatvoren u $\mathbb{R}$. Kako je $A = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap X$, i $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ zatvoren u $\mathbb{R}$, onda je A zatvoren. Ograničenost skupa A je očigledna, jer naprimjer $A \subseteq B(0,2)$. Pokažimo da A nije kompaktan. U tu svrhu posmatrajmo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran sa

$$\begin{aligned} &x_1 = 1,7\\ &x_2 = 1,73\\ &x_3 = 1,732\\ &x_4 = 1,7320\\ &x_5 = 1,73205\\ &\vdots \end{aligned}$$

tj. niz u A čiji je opći član x_n jednak broju $\sqrt{3}$ zaokruženom na n decimala. Jasno je da se iz ovako definiranog niza ne može izdvojiti podniz konvergentan u A, pa A nije kompaktan.

c. Jasno je da je A zatvoren i ograničen skup. Pokažimo da A nije kompaktan. Posmatrajmo sljedeći niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A

$$\begin{aligned} &x_1 = \tfrac{1}{2}\\ &x_2 = \tfrac{3}{4}\\ &x_3 = \tfrac{5}{6}\\ &\vdots\\ &x_n = 1 - \tfrac{1}{2n}\\ &\vdots \end{aligned}$$

Iz ovako definiranog niza sigurno je nemoguće izdvojiti konvergentan podniz u A, pa A nije kompaktan.

d. Kako svaki konvergentan niz tačaka u A očigledno konvergira ka tački koja je i sama u A, A je zatvoren. Ograničenost je takodjer očigledna, jer naprimjer $A \subseteq B(0, \frac{3}{2})$. Da bismo se uvjerili da A nije kompaktan, posmatrajmo niz svih elemenata u A, tj. niz

$$\begin{aligned} &x_1 = (1,0,0,...,0,0,0,...)\\ &x_2 = (0,1,0,...,0,0,0,...)\\ &x_3 = (0,0,1,...,0,0,0,...)\\ &\vdots\\ &x_n = (0,0,0,...,0,1,0,...)\\ &\vdots \end{aligned}$$

Kako vrijedi $d(x_m, x_n) = \sqrt{2}$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, iz datog niza nije moguće izdvojiti konvergentan podniz. Time je dokaz završen.

▲

Primjedba 1.6.1 *Na osnovu prethodnih primjera, mogli smo uočiti nekoliko različitih načina kako pokazati da skup A u metričkom prostoru (X, d) nije kompaktan. Jasno je da je dovoljno uraditi bilo šta od sljedećeg:*

1. *Pronaći niz u A iz kojeg se ne može izvući konvergentan podniz, što najčešće činimo na sljedeće načine:*

   a. *Pronalaženjem niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A čija su bilo koja dva člana na udaljenosti većoj od neke konstante, tj. niza za koji vrijedi $d(x_m, x_n) \geq$ const. za sve $m, n \in \mathbb{N}$, ili*

   b. *Pronalaženjem niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ koji je konvergentan u X, ali takav da mu granica nije u A*

3. *Dokazati da X nije kompletan.*

4. *Dokazati da X nije separabilan.*

5. *Dokazati da X nije zatvoren.*

6. *Dokazati da X nije ograničen.*

Ipak, najbolje ćemo shvatiti pojam kompaktnosti ako posmatramo prostor koji jeste kompletan, separabilan, zatvoren i ograničen, ali nije kompaktan, i takvi su nam zadaci posebno zanimljivi (pokušajte pronaći takve primjere u zadacima u samoj zbirci). Tada nam očito preostaje nekompaktnost posmatranog skupa dokazati na prvi navedeni način, tj. pronalaženjem niza iz kojeg se ne može izdvojiti konvergentan podniz.

ZADATAK 1.6.3 *Svaki ograničen skup u $(\mathbb{R}^n, d_p)$ $(n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty)$ je relativno kompaktan.*

Rješenje: Neka je $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ograničen skup. Dokažimo da je E relativno kompaktan. Kako je $\mathbb{R}^n$ kompletan, dovoljno je pokazati da za sve $\varepsilon > 0$ postoji N_ε konačna mreža skupa E. Posmatrajmo stoga proizvoljan $\varepsilon > 0$. Kako je E ograničen, vrijedi

$$(\exists [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n): \quad E \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Jedna od ideja koja bi se mogla nametnuti jeste da iz svakog od ovih segmenata "pokupimo" racionalne tačke, i onda posmatramo skup svih tačaka u

$\mathbb{R}^n$ čije su koordinate ti racionalni brojevi, no time bismo dobili prebrojivu ε-mrežu, ali ne konačnu. Stoga ćemo taj pristup malo promijeniti, dijeleći segmente $[a_i, b_i] \quad (i \in \overline{1,n})$ sa konačno mnogo tačaka podjele:

$$a_i = x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < x_i^{(3)} < ... < x_i^{(p_i)} = b_i,$$

ali takve da je zadovoljeno

$$d(x_i^{(k)}, x_i^{(k+1)}) = |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (k \in \overline{1, p_i - 1})$$

To sigurno možemo uraditi izaberemo li $p_i \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{|b_i - a_i|}{p_i} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, odnosno da $p_i > \frac{\sqrt{n}|b_i - a_i|}{\varepsilon}$. Formirajmo sada skup A svih tačaka $x \in \mathbb{R}^n$ čije su odgovarajuće koordinate navedene tačke podjele, tj. neka

$$A = \{(x_1^{(s_1)}, x_2^{(s_2)}, ..., x_n^{(s_n)}) : \quad s_i \in \{1, 2, ..., p_i\}, i \in \overline{1,n}\}.$$

Skup A ima $p_1 p_2 ... p_n$ elemenata, pa je konačan. Neka je $x \in E$ proizvoljan, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Kako je $E \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$, onda

$$x_1 \in [a_1, b_1] \quad \wedge \quad x_2 \in [a_2, b_2] \quad \wedge ... \wedge \quad x_n \in [a_n, b_n].$$

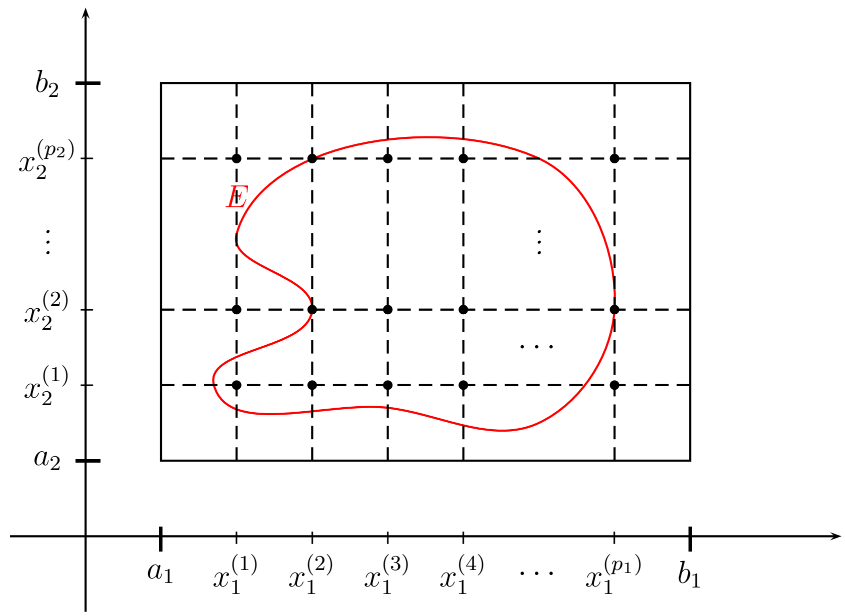
Na osnovu definicije skupa A, jasno je da postoji $y = (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, ..., x_n^{k_n}) \in A$, pri čemu je k_i neki element iz $\{1, 2, ..., p_i\}$ $(i \in \overline{1,n})$, takav da

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}} < ((\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2 + (\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2 + ... + (\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon,$$

pa je upravo A konačna ε-mreža skup E. Time je dokaz završen. ▲

Primjedba 1.6.2 *Kako bi prethodni primjer bio jasniji, ponoviti ćemo cijeli dokaz u slučaju* $n = 2$*, što bi, uz grafik, trebalo pružiti dobar uvid u definiciju mreže. Neka je tako* $E \subseteq \mathbb{R}^2$ *proizvoljan ograničen skup, i* $\varepsilon > 0$ *takodjer proizvoljan. Zbog ograničenosti skupa* E*, vrijedi*

$$(\exists [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2) : \quad E \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$



Podijeliti ćemo segmente $[a_1, b_1]$ *i* $[a_2, b_2]$ *na sljedeći način*

$$a_1 = x_1^{(1)} < x_1^{(2)} < x_1^{(3)} < ... < x_1^{(p_1)} = b_1, \quad |x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (k \in \overline{1, p_1 - 1}),$$

$$a_2 = x_2^{(1)} < x_2^{(2)} < x_2^{(3)} < ... < x_2^{(p_2)} = b_2, \quad |x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (k \in \overline{1, p_2 - 1}).$$

To sigurno možemo uraditi izaberemo li $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ *takve da* $p_1 > \frac{\sqrt{2}|b_1 - a_1|}{\varepsilon}$, $p_2 > \frac{\sqrt{2}|b_2 - a_2|}{\varepsilon}$. *Formirajmo sada skup* A *svih tačaka u ravni čije su odgovarajuće koordinate navedene tačke podjele, tj. neka*

$$A = \{(x_1^{(s_1)}, x_2^{(s_2)}) : \quad s_1 \in \{1, 2, ..., p_1\}, s_2 \in \{1, 2, ..., p_2\}\}$$

(To su sve označene tačke na slici.) Skup A *ima* $p_1 p_2$ *elemenata, pa je konačan. Neka je* $x \in E$ *proizvoljan,* $x = (x_1, x_2)$. *Kako je* $E \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *onda*

$$x_1 \in [a_1, b_1] \quad \wedge \quad x_2 \in [a_2, b_2].$$

Na osnovu definicije skupa A, *jasno je da postoji* $y = (y_1, y_2) = (x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}) \in A$, *pri čemu je* k_i *neki element iz* $\{1, 2, ..., p_i\}$ $(i \in \overline{1, 2})$ *takav da*

$$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} < \sqrt{(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})^2} = \varepsilon.$$

($y \in A$ je ona od označenih tačaka u ravni koja je najbliža $x \in E$.) Stoga je A konačna ε-mreža skup E. Time je dokaz završen.

Napokon imamo potpuniju sliku o odnosu kompaktnosti i kombinacije zatvorenosti i ograničenosti. Kao što je navedeno, ti pojmovi su ekvivalentni u $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ (a poslije ćemo se uvjeriti da su samim time ekvivaletni u svim konačnodimenzionalnim metričkim prostorima), dok je u općem slučaju osobina kompaktnosti jača. Sada je jasno da taj odnos ustvari možemo svesti na posmatranje odnosa relativne kompaktnosti i ograničenosti skupa. Relativna kompaktnost je jača osobina od ograničenosti skupa, dok su u $\mathbb{R}^n$ ti pojmovi ekvivalentni (na osnovu prethodnog zadatka).

Podsjetimo se da smo u jednom od prethodnim zadataka utvrdili da je svaki kompaktan prostor kompletan, i separabilan. Kako bi u potpunosti predstavili njihov odnos, napomenimo da obrat ne mora da vrijedi. U to se možemo uvjeriti posmatramo li prostor $\mathbb{R}$ sa Euklidskom metrikom, koji je i kompletan i separabilan, ali nije kompaktan.

ZADATAK 1.6.4 *Dokazati:*

a. *Skup tačaka $A = \{x = (\xi_i) : |\xi_i| \leq \frac{1}{2^i}, i \in \mathbb{N}\}$ je kompaktan u l_2.*

b. *Skup tačaka $A = \{x = (\xi_i) : |\xi_i| \leq \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}\}$ je kompaktan u l_2.*

c. *Skup tačaka $A = \{x = (\xi_i) : |\xi_i| \leq 1, i \in \mathbb{N}\}$ nije kompaktan u l_2.*

Rješenje:

a. Dokažimo prvobitno da je A relativno kompaktan. Kako je l_2 kompletan, dovoljno je pokazati da A ima konačnu ε-mrežu za sve $\varepsilon > 0$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Neka je

$$B = \{b \in l_2 | b = (b_1, b_2, ..., b_N, 0, 0, 0, ...), |b_i| \leq \frac{1}{2^i}\},$$

pri čemu je $N \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Nama je ustvari, što će kasnije postati očito, potrebno da vrijedi $(\sum_{i=N+1}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Medjutim, kako vrijedi

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} q^i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i - \sum_{i=0}^{N} q^i = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{q^{N+1}}{1-q},$$

onda
$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\frac{1}{2^i})^2=\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{(\frac{1}{4})^{N+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\frac{1}{4^N}<(\frac{\varepsilon}{2})^2.$$

(Takav broj $N\in\mathbb{N}$ sigurno postoji, naprimjer $N=\lceil\frac{\ln 2-\ln\varepsilon}{\ln 2}\rceil$.) Ako sada posmatramo proizvoljnu tačku $x\in A$, na osnovu definicije skupa A i navedenog razmatranja, jasno je da postoji $b\in B$ takav da

$$d_2(x,b)=(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-b_i|^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=N+1}^{\infty}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}\leq(\sum_{i=N+1}^{\infty}|\frac{1}{2^i}|^2)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2},$$

što znači da je skup B $\frac{\varepsilon}{2}$-mreža za skup A. Medjutim, skup B možemo smatrati skupom u $\mathbb{R}^N$, a kako je B ograničen, on je relativno kompaktan. Stoga, B ima konačnu $\frac{\varepsilon}{2}$-mrežu za sve $\varepsilon>0$ (neka je to skup C), koja je onda ε-mreža za skup A. Naime,

$$B \text{ je } \frac{\varepsilon}{2}\text{-mreža za } A \Leftrightarrow (\forall x\in A)(\exists b\in B): \quad d_2(x,b)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$C \text{ je } \frac{\varepsilon}{2}\text{-mreža za } B \Leftrightarrow (\forall b\in B)(\exists c\in C): \quad d_2(b,c)<\frac{\varepsilon}{2},$$

pa stoga imamo

$$(\forall x\in A)(\exists c\in C): \quad d_2(x,c)\leq d_2(x,b)+d_2(b,c)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Kako je A očigledno zatvoren skup, A je kompaktan.

b. Dokaz je analogan kao pod a: Dokažimo prvobitno da je A relativno kompaktan. Kako je l_2 kompletan, dovoljno je pokazati da A ima konačnu ε-mrežu za sve $\varepsilon>0$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan $\varepsilon>0$. Neka je

$$B=\{b\in l_2|b=(b_1,b_2,...,b_N,0,0,0,...),|b_i|\leq\frac{1}{i}\},$$

pri čemu je $N\in\mathbb{N}$ takav da $(\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^2})^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$. Uočimo zašto takav prirodan broj mora postojati. Poznato je da je red $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ konvergentan, pa vrijedi
$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=C<\infty.$$

(U sklopu ranijih kurseva pokazano je da je $C = \frac{\pi^2}{6}$.) Takodjer, očigledno je

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} = f(N), \text{ pri čemu je } f \text{ realna rastuća funkcija.}$$

Tada je

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} = C - f(N),$$

pa kako je f rastuća funkcija sigurno možemo naći dovoljno velik $N \in \mathbb{N}$ takav da

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = C - f(N) < (\frac{\varepsilon}{2})^2,$$

odnosno da $f(N) > C - \frac{\varepsilon}{2}$. Ako sada posmatramo proizvoljnu tačku $x \in A$, onda je jasno da postoji $b \in B$ takav da

$$d_2(x,b) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - b_i|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=N+1}^{\infty} (\frac{1}{i})^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

što znači da je skup B $\frac{\varepsilon}{2}$-mreža za skup A. Medjutim, skup B možemo smatrati skupom u $\mathbb{R}^N$, a kako je B ograničen, on je relativno kompaktan. Stoga, B ima konačnu $\frac{\varepsilon}{2}$-mrežu za sve $\varepsilon > 0$, (neka je to skup C), koja je onda ε-mreža za skup A. Naime,

$$B \text{ je } \frac{\varepsilon}{2}\text{-mreža za } A \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists b \in B): \quad d_2(x,b) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$C \text{ je } \frac{\varepsilon}{2}\text{-mreža za } B \Leftrightarrow (\forall b \in B)(\exists c \in C): \quad d_2(b,c) < \frac{\varepsilon}{2},$$

pa stoga imamo

$$(\forall x \in A)(\exists c \in C): \quad d_2(x,c) \leq d_2(x,b) + d_2(b,c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kako je A očigledno zatvoren skup, A je kompaktan.

c. Prije nego što pristupimo dokazivanju nekompaktnosti skupa A, zapitajmo se zašto ne bi mogli koristiti analogan metod kao pod a. i b. i dokazati da je A ustvari kompaktan. Pogledamo li dokaz pod a., vrlo brzo ćemo uočiti da nam je bilo neophodno postojanje prirodnog broja $N \in \mathbb{N}$ za kojeg vrijedi

$$(\sum_{i=N+1}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{odnosno, } (\sum_{i=N+1}^{\infty} (\frac{1}{i})^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}),$$

što prateći analogiju ovdje ne bi mogli postići. Naime, trebali bi pronaći prirodan broj N za koji vrijedi

$$(\sum_{i=N+1}^{\infty} 1)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2},$$

što je očito nemoguće. Ustvari, sada možemo zaključiti da je dovoljan uslov za kompaktnost skupa

$$A = \{x = (\xi_i) : |\xi_i| \leq t_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq l_2$$

konvergencija reda $\sum_{i=1}^{\infty} |t_i|^2$.
Predjimo konačno na dokazivanje nekompaktnosti skupa A, za što ćemo koristiti jedan od ranije navedenih "trikova": pronaći ćemo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A čija su svaka dva člana podjednako udaljena, pa sigurno iz takvog niza nećemo moći izvući konvergentan podniz. Jedan takav jednostavan niz je

$$\begin{aligned} &x_1 = (1, 0, 0, 0, ..., 0, 0, 0, ...) \\ &x_2 = (0, 1, 0, 0, ..., 0, 0, 0, ...) \\ &\vdots \\ &x_n = (0, 0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zaista, imamo

$$d(x_m, x_n) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^2)^{\frac{1}{2}} = (1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Dakle, A nije kompaktan u l_2.

▲

Primjedba 1.6.3 *Koristimo li trik kao pod c. u posljednjem zadatku, treba strogo paziti da $d(x_m, x_n)$ zaista jeste konstanta C, a ne neki broj C koji je "prividno" tražena konstanta, tj. treba paziti da C nije broj takav da $C \to 0$ kad $m, n \to \infty$. Objasnimo ovo detaljno koristeći se prethodnim zadatkom kao primjerom! Često kada želimo pokazati da neki skup X nije kompaktan na način kao što smo u slučaju c. pokazali da A nije kompaktan u l_2 (pronalaženjem niza čija su svaka dva člana na konstantnoj udaljenosti),* *posmatramo niz koji ima sljedeći oblik*

$$\begin{aligned}
&x_1 = (t_1 + K, t_2, ..., t_n, ...)\\
&x_2 = (t_1, t_2 + K, ..., t_n, ...)\\
&\vdots\\
&x_n = (t_1, t_2, ..., t_n + K, ...)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definiranje niza je u takvoj formi jer nam ono omogućava da zaista vrijedi

$$d_2(x_m, x_n) = (|K|^2 + |K|^2)^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{2} = C \ \text{za sve}\ m, n \in \mathbb{N}(m \neq n)$$

Iz posljednje tvrdnje dalo bi se zaključiti da smo pronašli niz čija su svaka dva člana na konstantnoj udaljenosti, te da A nije kompaktan u l_2. Medjutim, kako niz uvijek možemo odabrati na prezentirani način, dalje bi zaključili da nijedan skup u l_2 nije kompaktan, što očigledno nije tačno uzmemo li u obzir prethodni zadatak. Gdje je greška?
Neophodno je paziti da li postoje ikakva ograničenja za navedeni broj K, koja bi možda dovela čak do toga da moramo birati upravo $K = 0$. Kako bi se u potpunosti uvjerili u kakvu "zamku" možemo "upasti" ne vodeći računa o "konstanti" K, pokušajmo konkretno dokazati da skup

$$A = \{x = (\xi_i) : |\xi_i| \leq \frac{1}{2^i}, i \in \mathbb{N}\}$$

(za kojeg smo u prethodnom zadatku eksplicitno pokazali da je kompaktan u l_2) nije kompaktan u l_2 na gore izloženi način. Naime, posmatrajmo niz

$$\begin{aligned}
&x_1 = (\tfrac{1}{2} - K, \tfrac{1}{2^2}, \tfrac{1}{2^3}, ..., \tfrac{1}{2^{n-1}}, \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n+1}}, ...)\\
&x_2 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2^2} - K, \tfrac{1}{2^3}, ..., \tfrac{1}{2^{n-1}}, \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n+1}}, ...)\\
&\vdots\\
&x_n = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2^2}, \tfrac{1}{2^3}, ..., \tfrac{1}{2^{n-1}}, \tfrac{1}{2^n} - K, \tfrac{1}{2^{n+1}}, ...)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kako je $d(x_m, x_n) = K\sqrt{2}$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, mogli bi zaključiti da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ upravo niz u A iz kojeg ne možemo izvući konvergentan podniz, pa A nije kompaktan.
Medjutim, po definiciji skupa A, $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je u A ako $|\xi_i| \leq \frac{1}{2^i}$. Stoga, da bi gore navedeni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaista bio u A mora da vrijedi

$$|\frac{1}{2^n} - K| \leq \frac{1}{2}^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

što je ekvivalentno sa

$$0 < K < \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

No, takva konstanta ne postoji! Stoga još jednom napomenimo koliko je važno obratiti pažnju na svaki uslov zadatka, jer bi inače npr. u posljednjem zadatku mogli pogrešno smatrati da smo konstruisali niz kojem su svake dvije tačke na konstatnoj udaljenosti, i time doći do zaključka da skupovi u slučajevima a. i b. nisu kompaktni (kao i svaki drugi skup u l_2, *što je teško za povjerovati). Da bi nizovi definirani na ovdje prezentirani način zaista bili u posmatranom skupu, nerijetko bi dobili da mora vrijediti* $K = 0$, *pa je taj niz onda konstantan i iz njega se sigurno može izvući konvergentan podniz (sam taj niz).*

ZADATAK 1.6.5 *Neka je* (X, d) *kompaktan metrički prostor, i* $A \subseteq X$. *Ako je* A *zatvoren skup, tada je* A *kompaktan. Dokazati!*

Rješenje: Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u A. Kako je $A \subseteq X$, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je i X, pa zbog kompaktnosti skupa X postoji podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ početnog niza koji je konvergentan u X. Neka

$$x_{n_k} \to x_0 \in X \quad (k \to \infty).$$

Medjutim, A je po pretpostavci zatvoren, pa $x_0 \in A$. Dakle, A je zaista kompaktan. ▲

1.6.1 Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima

ZADATAK 1.6.6 *Neka je* (X, d) *kompaktan metrički prostor, i neka je* $f : X \to X$ *preslikavanje za koje vrijedi:*

$$(\forall x, y \in X, x \neq y) : \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Dokazati da f *ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Rješenje: Pokažimo prvo da f ima najviše jednu fiksnu tačku. Pretpostavimo suprotno

$$(\exists a, b \in X, a \neq b) : \quad f(a) = a \text{ i } f(b) = b.$$

Tada $d(a,b) = d(f(a), f(b)) < d(a,b)$, što je kontradikcija. Dakle, ako f ima fiksnu tačku, ona je jedinstvena. Pokažimo sada da f zaista ima fiksnu tačku. Definirajmo pomoćnu realnu funkciju $g : X \to \mathbb{R}$ sa

$$g(x) = d(x, f(x))$$

Želimo pokazati da je g neprekidna funkcija, pa treba utvrditi da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X) : \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |d(x, f(x)) - d(y, f(y))| \\ &\overset{Lemma}{\leq} d(x,y) + d(f(x), f(y)) \\ &< d(x,y) + d(x,y) \\ &= 2d(x,y), \end{aligned}$$

pa zaista

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\forall x, y \in X) : \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Dakle, g je neprekidna, a kako je g definirana na kompaktnom skupu X, ona dostiže svoj minimum u nekoj tački $a \in X$. Tvrdimo da je upravo a tražena fiksna tačka, tj. da vrijedi $f(a) = a$. Pretpostavimo suprotno, neka $f(a) \neq a$. Imamo

$$g(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = g(a),$$

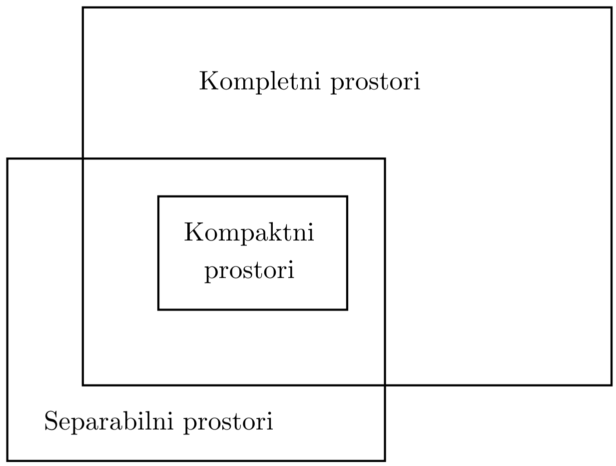
što je kontradikcija sa činjenicom da g doseže minimum u tački a. Stoga zaista vrijedi $f(a) = a$, tj. a je fiksna tačka preslikavanja f, i to (zbog prvog dijela dokaza) a je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f. ▲

Primjedba 1.6.4 *Kroz sekcije 1.3 i 1.4 mogli smo u nekoliko navrata primjetiti da činjenica*

$$(\forall x, y \in X, x \neq y) : \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

ne implicira da $f : X \to X$ ima fiksnu tačku ukoliko je (X, d) kompletan (tj. ukoliko u uslovima Banachovog stava o fiksnoj tački "samo" izostavimo egzistenciju konstante q). Ipak, iz posljednjeg zadataka jasno je da navedena činjenica povlači postojanje jedinstvene fiksne tačke za f ukoliko je (X, d) kompaktan metrički prostor. Ponovno možemo ustanoviti kako je svojstvo kompaktnosti prostora mnogo "jače" od svojstva kompletnosti.

Na kraju ovog poglavlja, studentima se preporučuje da posvete posebnu pažnju sljedećem grafiku koji predstavlja odnos izmedju najvažnijih pojmova u ovom poglavlju. Pokušajte sa nekoliko primjera potkrijepiti odnose koji su ovdje predstavljeni. (Veliki broj najvažnijih primjera nalazi se u samoj zbirci, kroz zadatke, primjedbe i dodatna objašnjenja.) Pokušajte sami u sliku ubaciti i zatvorene i ograničene prostore, uz dodatne primjere kojima ćete potvrditi te odnose.



Poglavlje 2

Banachovi prostori

Cilj ovog poglavlja jeste razumijevanje pojma iz njegovog samog naslova - pojma Banachovog prostora. Posebno je važno uočiti algebarsku strukturu Banachovog prostora, za što je potrebno posjetiti se na osnovne pojmove linearne algebre (prva sekcija), te metričku strukturu Banachovog prostora, za što nam je potrebno znanje iz I poglavlja, te uvodjenje pojma norme (druga sekcija).

2.1 Linearni vektorski prostori

U ovoj sekciji važno je podsjetiti se na osnovne pojmove iz linearne algebre: linearni vektorski prostor, vektorski podprostor, linearna kombinacija vektora, (direktna) suma prostora, linearna (ne)zavisnost vektora, algebarska baza prostora. Ovi pojmovi neophodni su za daljnji rad tokom kursa Realna analiza, a svi su, kao i osnovne relacije koje zadovoljavaju, navedeni u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/09)". Što se tiče zadataka iz ove oblasti, sami po sebi nam nisu bitni za ovaj kurs, pa ćemo ih ovdje izostaviti. Moć linearnih vektorskih prostora leži u tome što nam, izmedju ostalog, omogućava sabiranje vektora i množenje vektora skalarom, pa tako možemo posmatrati i redove $\sum x_i$ u proizvoljnom vektorskom prostoru.

Navedimo samo ovdje bez dokaza neke značajnije vektorske prostore. Inače, trebalo bi samo provjeriti deset osobina iz definicije linearnog vektorskog prostora.

ZADATAK 2.1.1 *Sljedeći skupovi su linearni vektorski prostori*

a. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) \quad (n \in \mathbb{N})$

b. $(\mathcal{B}[a,b], +, \cdot)$

c. $(\mathcal{C}[a,b], +, \cdot)$

d. $(l_p, +, \cdot) \quad (1 \leq p \leq \infty)$

e. $(c, +, \cdot)$

f. $(c_0, +, \cdot)$

g. $(L_p(\Omega), +, \cdot) \quad (1 \leq p < \infty)$

Ipak, studentima se za vježbu preporučuje da dokažu da su neki od navedenih prostora zaista linearni vektorski prostori, naprimjer barem za $(l_p, +, \cdot)$, ili $(L_p(\Omega), +, \cdot)$.

2.2 Normirani prostori

Konačno, uvedimo i pojam norme, koji će nam, poput metrike, omogućiti mjerenje udaljenosti svaka dva vektora, ali koja posjeduje i odredjena dodatna svojstva.

Definicija 2.2.1 (NORMA) *Neka je X linearan vektorski prostor nad poljem skalara Φ. Za funkciju $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ kažemo da je norma na X, ako zadovoljava sljedeće osobine*

(N1) $(\forall x \in X) : \quad \|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X) : \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N4) $(\forall x, y \in X) : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tada uredjeni par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo normiran linearan vektorski prostor.

ZADATAK 2.2.1 *Dokazati da je* $(X, \|\cdot\|)$ *normiran prostor ako je*

a. $X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$

b. $X = \mathbb{R}^n, \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$

c. $X = \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

d. $X = \mathcal{B}[a, b], \|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$

e. $X = \mathcal{C}[a, b], \|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$

f. $X = l_p, \|x\| = (\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

g. $X = c, \|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

h. $X = c_0, \|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

i. $X = L_p(\Omega), \|x\| = (\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

Rješenje: Lako se uvjeravamo da su sva navedena preslikavanja zaista realne funkcije (kao u prvom poglavlju), te da zadovoljavaju sve osobine norme (N1)-(N4):

a. $X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$
Na osnovu osobina funkcije apsolutne vrijednosti realnog broja, jasno je da vrijedi:

(N1) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad |x| \geq 0$

(N2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad |\lambda x| = |\lambda||x|$

(N4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : \quad |x + y| \leq |x| + |y|$

b. $X = \mathbb{R}^n, \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$

(N1) Kako je suma nenegativnih vrijednosti nenegativan broj, imamo

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n): \quad \|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

(N2) Druga je osobina zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \ &\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n}) \\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda x\| = (\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|$

(N4) Na osnovu nejednakosti Minkowskog, zaključujemo da vrijedi

$$\|x+y\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\| + \|y\|$$

c. $X = \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

(N1) $(\forall x \in \mathbb{R}^n): \quad \|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \geq 0$

(N2) Druga je osobina zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \ &\Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n}) \\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda x\| = \max\limits_{1 \leq 1 \leq n} |\lambda x_i| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda| \|x\|$

(N4) Konačno, nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x+y\| \ &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

d. $X = \mathcal{B}[a,b], \|x\| = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$

(N1) $(\forall x \in \mathcal{B}[a,b]): \quad \|x\| = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| \geq 0$

(N2) Druga je osobina zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \quad & \Leftrightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)| = 0 \\ & \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \quad (\forall t \in [a,b]) \\ & \Leftrightarrow x(t) = 0 \quad (\forall t \in [a,b]) \\ & \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda x\| = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |\lambda x(t)| = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |\lambda||x(t)| = |\lambda| \sup\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| = |\lambda|\|x\|$

(N4) Konačno, nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x+y\| \quad & = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) + y(t)| \\ & \leq \sup_{a \leq t \leq b} (|x(t)| + |y(t)|) \\ & \leq \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sup_{a \leq t \leq b} |y(t)| \\ & = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

e. $X = \mathcal{C}[a,b], \|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$
Potpuno analogno kao pod d.

f. $X = l_p, \|x\| = (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

(N1) Kako je suma nenegativnih vrijednosti nenegativan broj, imamo $(\forall x \in l_p): \quad \|x\| = (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$

(N2) Druga je osobina zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \quad & \Leftrightarrow (\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ & \Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ & \Leftrightarrow x_i = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ & \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda x\| = (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |\lambda x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |\lambda|^p |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|x\|$

(N4) Na osnovu nejednakosti Minkowskog, zaključujemo da vrijedi $\|x+y\| = (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i|)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\| + \|y\|$

g. $X = c, \|x\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$

(N1) $(\forall x \in c): \quad \|x\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \geq 0$

(N2) Druga je osobina zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda x\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\lambda x_i| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = |\lambda|\|x\|$

(N4) Konačno, nejednakost trougla je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x + y\| \quad &= \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i| \\ &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}}(|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

h. $X = c_0, \|x\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ Potpuno analogno kao pod g.

i. $X = L_p(\Omega), \|x\| = (\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

(N1) Integral nenegativne funkcije je nenegativan broj, pa

$$(\forall x \in L_p(\Omega)): \quad \|x\| = (\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

(N2) Druga je osobina zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 \quad &\Leftrightarrow (\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x(t)| = 0 \quad (\forall t \in \Omega) \\ &\Leftrightarrow x(t) = 0 \quad (\forall t \in \Omega) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda x\| = (\int_\Omega |\lambda x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = (\int_\Omega |\lambda|^p |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|(\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} =$
$|\lambda|\|x\|$

(N4) Konačno, na osnovu integralnog oblika nejednakosti Minkowskog jednostavno zaključujemo da je zadovoljena i nejednakost trougla:

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \left(\int_\Omega |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega (|x(t)|+|y(t)|)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

▲

Odmah u uvodnom dijelu navedeno je da je norma još "ljepša" funkcija od metrike, što bi značilo da je time svaka norma metrika. Pokažimo to eksplicitno. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran linearan vektorski prostor. Posmatrajmo funkciju $d : X \times X \in \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Lako provjeravamo da ovako definirana funkcija zadovoljava sve aksiome $(M1)-(M4)$, pa je d zaista metrika, koju nazivamo metrika inducirana normom $\|\cdot\|$. Dakle, svaki normiran linearni vektorski prostor je metrički prostor, a kako je i za očekivati, obrat ne vrijedi. Zašto? Ukoliko bismo posmatrali metrički prostor (X,d), jasno je da bi normu pokušali definirati sa

$$\|x\| = d(x,0).$$

Medjutim, zašto to nije uvijek moguće? Kroz prethodni zadatak mogli smo primjetiti da pomoću većine metrika koje smo spominjali u u prethodnom poglavlju moguće je na navedeni način definirati preslikavanje koje će zaista biti norma, no u općem slučaju to ne mora vrijediti. Naime, primjetite da metrički prostor X ne mora biti linearan vektorski prostor, pa se može desiti da u X i ne postoji 0, tj. neutralni element za sabiranje. Štaviše, čak i ako X jeste vektorski prostor, i $d(x,0)$ uvijek postoji, i tada se može desiti da $\|x\| = d(x,0)$ nije norma. Koja je to osobina koju posjeduje norma, a da metrika ne mora? Možemo odmah uočiti da neće morati vrijediti osobina $(N3)$. Zaista, ako posmatramo diskretan metrički vektorski prostor (X,d), imamo

$$(\forall x \in X, x \neq 0)(\forall \lambda \in \Phi, \lambda \neq 0) \quad d(\lambda x, 0) = d(x,0) = 1,$$

pa čim je $\lambda \neq \pm 1$ neće vrijediti

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

Dakle, svaki normiran prostor je metrički prostor, ali obrat ne vrijedi.

Zbog toga, sve što vrijedi za metričke prostore, vrijedi i za normirane. Stoga je sada jasno da u svakom normiranom prostoru možemo posmatrati pojmove poput neprekidna funkcija, konvergentan, Cauchyev ili ograničen niz, kompletnost, separabilnost ili kompaktnost. Studentima se preporučuje da za vježbu definiraju neke od ovih pojmova u normiranom vektorskom prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Naprimjer, ako bismo željeli definirati neprekidno preslikavanje, to bi uradili na sljedeći način:

Definicija 2.2.2 (NEPREKIDNA FUNKCIJA) *Neka su* $(X, \|\cdot\|_X)$ *i* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *normirani vektorski prostori. Preslikavanje* $f : X \to Y$ *je neprekidno u tački* $x_0 \in X$ *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X): \quad \|x_0 - x\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x_0) - f(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Preslikavanje f *je neprekidno na* X *ako je neprekidno u svakoj tački* $x \in X$.

Ispostavlja se da je veoma važno i prirodno raditi u kompletnim prostorima. Rad u funkcionalnoj analizi na nekompletnim prostorima možemo porediti sa radom u matematikoj analizi nad racionalnim brojevima. Stoga imamo sljedeću definiciju.

Definicija 2.2.3 (BANACHOV PROSTOR) *Kompletan, normiran, linearan vektorski prostor se naziva Banachov prostor.*

Bitno je primjetiti i algebarsku i metričku strukturu Banachovih prostora. U algebarskom smislu su oni dakle linearni vektorski prostori, a u metričkom imaju na jedan specijalan način uvedenu strukturu - normirani su, i kompletni.

ZADATAK 2.2.2 *Dokazati da je* $(X, \|\cdot\|)$ *Banachov prostor ako je*

a. $X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$

b. $X = \mathbb{R}^n, \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^{\frac{1}{p}} \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty)$

c. $X = \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

d. $X = \mathcal{B}[a, b], \|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$

e. $X = \mathcal{C}[a, b], \|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$

f. $X = l_p, \|x\| = (\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

g. $X = c, \|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

h. $X = c_0, \|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

i. $X = L_p(\Omega), \|x\| = (\int_\Omega |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

Rješenje: Na osnovu prethodnih zadataka, navedeni prostori su normirani linearni vektorski prostori, a ranije je pokazano i da su kompletni. Time je dokaz završen. ▲

ZADATAK 2.2.3 $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|)$, *pri čemu je* $\|f\| = \int_a^b |f(t)|^p dt$ *nije Banachov prostor.*

Rješenje: Već ranije navedeno je da je $(\mathcal{C}[a, b], +, \cdot)$ linearni vektorski prostor. Taj dio odnosi se isključivo na algebarsku strukturu prostora u odnosu na definirane operacije $+$ i $\cdot$, pa je i ovdje zadovoljen. Na osnovu prethodnog zadatka mogli bi zaključiti i da je definirano preslikavanje $\|\cdot\|$ zaista norma. Medjutim, još u prvom poglavlju ustanovljeno je da ovakav prostor nije kompletan, pa samim time nije ni Banachov. ▲

ZADATAK 2.2.4 *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran linearan vektorski prostor. X je Banachov prostor akko je svaki apsolutno konvergentan red konvergentan u X, tj. akko konvergencija reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$ implicira konvergenciju reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$.*

Rješenje:

$\Rightarrow$) Neka je X Banachov prostor, i neka je red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$ konvergentan. Po definiciji konvergentnog reda, niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$ je konvergentan. Dakle, niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|)_{n\in\mathbb{N}}$ je konveregentan, pa je Cauchyev. Stoga vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \|t_m - t_n\| < \varepsilon.$$

Niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz realnih brojeva, a u $\mathbb{R}$ uobičajena norma je ustvari apsolutna vrijednost broja, pa ustvari imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |t_m - t_n| < \varepsilon,$$

odnosno

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |\sum_{i=1}^{m} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|| < \varepsilon,$$

tj.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{i=n}^{m} \|x_i\| < \varepsilon.$$

Kako na osnovu uopćene osobine (N4) vrijedi

$$\|\sum_{i=n}^{m} x_i\| \leq \sum_{i=n}^{m} \|x_i\|,$$

jasno je da sada imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \|\sum_{i=n}^{m} x_i\| < \varepsilon.$$

Dobili smo da je niz $(\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev u X, a kako je X kompletan, navedeni niz je konvergentan u X. Taj niz je ustvari niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$, pa je na osnovu definicije konvergencije reda, red $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ konvergentan.

$\Leftarrow$) Neka konvergencija reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$ implicira konvergenciju reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Trebamo pokazati da je X Banachov prostor. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan Cauchyev niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X, i dokažimo da je on konvergentan u X. Kako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev u X, imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon,$$

pa vrijedi

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k}.$$

Na ovaj način dobili smo podniz početnog niza, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da vrijedi

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Stoga imamo

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} < \infty,$$

tj. red $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|$ je konvergentan. Na osnovu pretpostavke zadatka, sada znamo da je konvergentan i red $\sum_{k\in\mathbb{N}}(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$, tj. vrijedi

$$\begin{aligned}
& \sum_{k\in\mathbb{N}}(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) = x_0 \in X \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) = x_0 \in X \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{N\to\infty} [(x_{n_1} - x_{n_2}) + (x_{n_2} - x_{n_3}) + \cdots + (x_{n_N} - x_{n_{N+1}})] = x_0 \in X \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{N\to\infty} (x_{n_1} - x_{n_{N+1}}) = x_0 \in X.
\end{aligned}$$

Dakle, sada imamo
$$\lim_{N\to\infty} x_{n_{N+1}} = x_{n_1} - x_0,$$
a kako je $x_{n_1} \in X$ kao jedan od članova početnog niza, i $x_0 \in X$, onda mora vrijediti i
$$\lim_{N\to\infty} x_{n_{N+1}} \in X,$$
jer je X vektorski prostor. Dobili smo da je niz $(x_{n_{N+1}})_{N\in\mathbb{N}}$ konvergentan u X, a kako vrijedi
$$(x_{n_{N+1}})_{N\in\mathbb{N}} \subset (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}(x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$
i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev u X, onda je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u X. Time smo pokazali kompletnost prostora X, pa je X Banachov prostor.

▲

Definicija 2.2.4 (BANACHOV PODPROSTOR) *Neka je X Banachov prostor i neka je $Y \subseteq X$. Y je Banachov podprostor od X ako je sam za sebe Banachov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X.*

ZADATAK 2.2.5 *Svaki zatvoren vektorski podprostor Banachovog prostora je Banachov podprostor.*

Rješenje: Neka je X Banachov prostor, i $Y \subseteq X$ zatvoren vektorski podprostor od X. Dokažimo da je Y Banachov podprostor od X, tj. da je Y sam za sebe Banachov prostor. Po pretpostavci zadatka, Y je vektorski podprostor od X, pa je po definiciji vektorskog podprostora, Y sam za sebe linearan vektorski podprostor. Jasno je da je Y normiran prostor, sa normom naslijedjenom iz X. Ostalo je još pokazati da je Y kompletan. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan Cauchyev niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$. Kako je $Y \subseteq X$, posmatrani niz je i niz u X, pa je zbog kompletnosti prostora X niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u X. Neka
$$x_n \to x_0 \in X \quad (n \to \infty).$$
Medjutim, x_0 je time tačka gomilanja skupa Y, a zbog zatvorenosti skupa Y vrijedi $x_0 \in Y$. Dakle, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u Y, pa je Y kompletan, a time i Banachov prostor. ▲

Definicija 2.2.5 (EKVIVALENTNOST NORMI) *Neka je X linearan vektorski prostor nad poljem skalaraq Φ, i $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije norme definirane na X. Norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ su ekvivalentne ako vrijedi*

$$(\exists C_1, C_2 > 0)(\forall x \in X): \quad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1.$$

Primjedba 2.2.1 *Iz same definicije naslućuje se da je ekvivalentnost normi jedna simetrična relacija. Pokažimo to i eksplicitno.*

$$\begin{aligned}
& (\exists C_1, C_2 > 0)(\forall x \in X): \quad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1 \\
\Leftrightarrow\ & (\exists C_1, C_2 > 0)(\forall x \in X): \quad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \quad \wedge \quad \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1 \\
\Leftrightarrow\ & (\exists C_1, C_2 > 0)(\forall x \in X): \quad \|x\|_1 \le \tfrac{1}{C_1}\|x\|_2 \quad \wedge \quad \tfrac{1}{C_2}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \\
\Leftrightarrow\ & (\exists K_1 = \tfrac{1}{C_2}, K_2 = \tfrac{1}{C_1} > 0)(\forall x \in X): \quad K_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le K_2\|x\|_2
\end{aligned}$$

Dakle, potpuno je svejedno da li kažemo da su norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ ekvivalentne, ili da su ekvivalentne norme $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_1$. Štaviše, lako se pokazuje da je navedena relacija jedna relacija ekvivalencije.

ZADATAK 2.2.6 *Neka je X linearan vektorski prostor nad poljem skalara Φ, i $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije ekvivalentne norme definirane na X. Tada vrijedi*

a. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergira ka $x \in X$ u $(X, \|\cdot\|_1)$ akko konvergira u $(X, \|\cdot\|_2)$.

b. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ je Cauchyev u $(X, \|\cdot\|_1)$ akko je Cauchyev u $(X, \|\cdot\|_2)$.

c. $(X, \|\cdot\|_1)$ je kompletan akko je $(X, \|\cdot\|_2)$ kompletan.

Rješenje: ▲

Konačnodimenzionalni linearni vektorski prostori zadovoljavaju neke iznimno lijepe osobine.

Teorem 2.2.1 *Svaka dva konačnodimenzionalna linearna vektorska prostora, iste dimenzije, su izomorfni.*

Teorem 2.2.2 *Svake dvije norme definirane na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru su ekvivalentne.*

Posmatramo li sada konačnodimenzionalne Banachove prostore, postaje jasno da ih, ukoliko su oni iste dimenzije, od ovog trenutka možemo poistovjećivati. Naime, zbog izomorfizma ih možemo poistovjetiti u algebarskom smislu, a zbog ekvivalencije normi i u metričkom smislu. Konačnodimenzionalni Banachovi prostori imaju još mnošto specifičnosti, poput naprimjer ekvivalencije konvergencije po normi i konvergencije po koordinatama. Kako su sve te lijepe osobine konačnodimenzionalnih prostora, uz dokaze, izložene u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)", ovdje ćemo ih izostaviti. U skripti su redovno navedeni i primjeri zašto navedene osobine ne moraju vrijediti i u beskonačnodimenzionalnim prostorima, pa se studentima svakako preporučuje pažljivo praćenje predavanja.

Poglavlje 3

Linearni operatori

Nakon izrade zadataka iz ovog poglavlja, studentima bi trebao biti potpuno jasan pojam operatora, te pojmovi linearan, neprekidan i ograničen operator, kao i načini ispitivanja ovih osobina datog operatora. Pored toga, jako je važno razumjeti definiciju norme operatora i kako se ona računa, te uopće rad u prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$ svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y. U drugom dijelu uvode se pojmovi inverznog i zatvorenog operatora, kao i neke zanimljive relacije koje za njih vrijede.

Definicija 3.0.6 (OPERATOR) *Neka su X i Y proizvoljni prostori. Operator $A : X \to Y$ je proizvoljno preslikavanje.*

Kao što smo navikli, sa $D_A \subseteq X$ označavati ćemo domen operatora A, pri čemu je bitno napomenuti da ćemo uvijek podrazumijevati da je D_A linearan vektorski prostor. Sa $R_A \subseteq Y$ označavati ćemo kodomen, odnosno područje slika operatora A. Za $x \in D_A$ djelovanje operatora A zapisivati ćemo sa Ax, umjesto $A(x)$.

3.1 Ograničenost i neprekidnost

Definicija 3.1.1 (LINEARAN OPERATOR) *Operator $A : X \to Y$ je linearan ako vrijedi*

$$(\forall x_1, x_2 \in D_A)(\forall \alpha, \beta \in \Phi): \quad A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Definicija 3.1.2 (OGRANIČEN OPERATOR) *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. A je ograničen operator ako vrijedi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X): \quad \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Infimum svih brojeva M za koje važi navedena relacija je norma operatora A, u oznaci $\|A\|$.

Teorem 3.1.1 *Neka je $A : X \to Y$ linearan ograničen operator. Tada vrijedi*

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Definicija 3.1.3 (NEPREKIDAN OPERATOR) *Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ normirani prostori, i $A : X \to Y$ linearan operator. A je neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_A) : \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon.$$

Operator A je neprekidan na skupu D_A ako je neprekidan u svakoj tački skupa D_A.

Primjedba 3.1.1 *Primjetimo da je linearan operator $A : X \to Y$ neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako za proizvoljan niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ takav da $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$ vrijedi*

$$Ax_n \to Ax_0 \quad (n \to \infty).$$

Linearni operatori zadovoljavaju nekoliko lijepih i iznenadjujućih osobina:

Teorem 3.1.2 *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Ako je A neprekidan u jednoj tački domena, onda je A neprekidan na čitavom domenu.*

Teorem 3.1.3 *Linearan operator je neprekidan akko je ograničen.*

Skup svih ograničenih linearnih operatora $A : X \to Y$ označavati ćemo sa $\mathcal{L}(X, Y)$. Na $\mathcal{L}(X, Y)$ možemo definirati operacije sabiranja i množenja skalarom na sljedeći način:

$$(A + B)x = Ax + Bx$$

$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Za ovako definiran skup vrijedi:

ZADATAK 3.1.1 *Neka je X normiran vektorski prostor, i Y Banachov prostor. Dokazati da je $\mathcal{L}(X, Y)$ Banachov prostor.*

Rješenje: Dokažimo prvobitno da je $\mathcal{L}(X, Y)$ linearan vektorski prostor. U tu svrhu posmatrajmo prozivoljne $A, B, C \in \mathcal{L}(X, Y)$, i $\lambda, \mu \in \Phi$, te provjerimo svih deset osobina definicije vektorskog prostora.

1. Provjerimo zatvorenost operacije sabiranja, tj. uvjerimo se da je $A + B \in \mathcal{L}(X,Y)$, odnosno da je $A+B$ ograničen linearan operator. $A+B$ je linearan operator jer su A i B linearni operatori, pa za sve $x_1, x_2 \in X$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ vrijedi

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x_1 + \beta x_2) &= A(\alpha x_1 + \beta x_2) + B(\alpha x_1 + \beta x_2)\\ &= \alpha A x_1 + \beta A x_2 + \alpha B x_1 + \beta B x_2\\ &= \alpha(Ax_1 + Bx_1) + \beta(Ax_2 + Bx_2)\\ &= \alpha(A+B)x_1 + \beta(A+B)x_2.\end{aligned}$$

Provjerimo i ograničenost operatora $A+B$. Kako su A i B ograničeni operatori, imamo

$$\|Ax\| \leq M_1\|x\|,$$

$$\|Bx\| \leq M_2\|x\|,$$

pa stoga vrijedi

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\| &= \|Ax + Bx\|\\ &\leq \|Ax\| + \|Bx\|\\ &\leq M_1\|x\| + M_2\|x\|\\ &= (M_1 + M_2)\|x\|\\ &= M\|x\|.\end{aligned}$$

Dakle, zaista $A + B \in \mathcal{L}(X,Y)$.

2. Asocijativnost sabiranja je očigledno zadovoljena jer je Y vektorski prostor, pa je u njemu zadovoljena asocijativnost:

$$\begin{aligned}[A + (B+C)]x &= Ax + (B+C)x\\ &= Ax + (Bx + Cx)\\ &= (Ax + Bx) + Cx\\ &= (A+B)x + Cx\\ &= [(A+B)+C]x.\end{aligned}$$

3. Y je vektorski prostor, pa u njemu postoji neutralni element za sabiranje O_Y. Odaberemo li $O : X \to Y$ takav operator koji svaki $x \in X$ slika u O_Y, jasno je da $O \in \mathcal{L}(X,Y)$, i da vrijedi

$$(\forall B \in \mathcal{L}(X,Y)) : \quad (O+B)x = Ox + Bx = 0_Y + Bx = Bx,$$

pa je O neutralni element za sabiranje u $\mathcal{L}(X,Y)$.

4. Ponovno, kako je Y vektorski prostor, svaki element $y \in Y$ ima svoj inverzni element za sabiranje $-y \in Y$. Tako svakom operatoru $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ možemo definirati njemu inverzni operator $-A \in \mathcal{L}(X,Y)$, koji, ako A slika x u y, slika x u $-y$. Prvobitno utvrdimo da je $-A$ zaista u $\mathcal{L}(X,Y)$. Neka su $x_1, x_2 \in X$ proizvoljni, i neka $Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$. Dokažimo da je $\alpha(-y_1)+\beta(-y_2)$ inverzni element za sabiranje elementu $\alpha y_1 + \beta y_2$:

   $$(\alpha y_1+\beta y_2)+(\alpha(-y_1)+\beta(-y_2)) = \alpha(y_1+(-y_1))+\beta(y_2+(-y_2)) = 0+0 = 0.$$

   Stoga, kako

   $$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

   onda

   $$-A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(-y_1) + \beta(-y_2) = \alpha(-A)x_1 + \beta(-A)x_2,$$

   što znači da je $-A$ linearan operator. Na osnovu ograničenosti operatora A imamo

   $$\|Ax\| = \|y\| \leq M\|x\|,$$

   pa je

   $$\| - Ax\| = \| - y\|? = \|y\| \leq M\|x\|.$$

   Dakle, $-A$ je i ograničen operator, pa zaista $-A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Kako vrijedi

   $$(\forall A \in \mathcal{L}(X,Y))(\exists -A \in \mathcal{L}(X,Y)) : \quad (A+(-A))x = Ax+(-Ax) = y+(-y) = 0,$$

   zadovoljena je egzistencija inverznih elemenata za sabiranje.

5. Komutativnost sabiranja je očigledna, jer je Y vektorski prostor pa je u njemu zadovoljena komutativnost:

   $$(A + B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B + A)x.$$

6. Provjerimo da li je operacija množenja skalarom zatvorena u $\mathcal{L}(X,Y)$, tj. provjerimo da li je $\lambda A \in \mathcal{L}(X,Y)$. λA je linearan operator jer je A linearan, i Y vektorski prostor pa u njemu vrijedi distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje, te asocijativnost množenja skalarom. Naime:

   $$\begin{aligned}(\lambda A)(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lambda A(\alpha x_1 + \beta x_2)\\ &= \lambda(\alpha A x_1 + \beta A x_2)\\ &= \lambda(\alpha A x_1) + \lambda(\beta A x_2)\\ &= \alpha(\lambda A x_1) + \beta(\lambda A x_2)\\ &= \alpha(\lambda A)x_1 + \beta(\lambda A)x_2.\end{aligned}$$

Dalje, λA je ograničen operator jer:

$$\|(\lambda A)x\| = \|\lambda Ax\| = |\lambda|\|Ax\| \leq |\lambda|M_1\|x\| = M\|x\|.$$

7. Asocijativnost množenja skalarom je zadovoljena ponovno zbog činjenice da je zadovoljena asocijativnost u prostoru Y :

$$[\lambda(\mu A)]x = \lambda(\mu A)x = \lambda(\mu Ax) = (\lambda\mu)Ax = [(\lambda\mu)A]x.$$

8. Egzistencija neutralnog elementa za množenje skalarom je trivijalna, kako je Y vektorski prostor pa znamo da postoji $1 \in \Phi$ tako da za sve $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ vrijedi

$$(1 \cdot A)x = 1 \cdot Ax = Ax.$$

9. Distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje je takodjer trivijalna jer je analogna osobina zadovoljena u prostoru Y:

$$[\lambda(A+B)]x = \lambda(A+B)x = \lambda(Ax+Bx) = \lambda Ax + \lambda Bx.$$

10. Konačno, jasno je i da je zadovoljena distributivnost u odnosu na sabiranje skalara jer analogna osobina vrijedi u prostoru Y:

$$[(\lambda+\mu)A]x = (\lambda+\mu)Ax = \lambda Ax + \mu Ax.$$

Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da je $\mathcal{L}(X,Y)$ linearan vektorski prostor. Provjerimo sada da li je $\mathcal{L}(X,Y)$ normiran, tj. da li je preslikavanje definirano sa

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

zaista norma. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ i $\lambda \in \Phi$. Da je ovo preslikavanje zaista realna funkcija jasno je jer su $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, tj. kako je A ograničen operator vrijedi

$$\|Ax\| \leq M\|x\|,$$

pa je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M.$$

Prvojerimo sada osobine norme (N1)-(N4).

(N1) Kako su X i Y normirani prostori, onda za sve $x \in X\backslash\{0\}$ vrijedi $\|x\|_X > 0$, i $\|Ax\|_Y \geq 0$, pa kako je $\|A\|$ definirana kao supremum nenegativnih vrijednosti, imamo

$$\|A\| \geq 0.$$

(N2) Druga osobina je zadovoljena jer vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|A\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \sup_{x \in X\backslash\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \\
&\Leftrightarrow \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \quad (\forall x \in X\backslash\{0\}) \\
&\Leftrightarrow \|Ax\|_Y = 0 \quad (\forall x \in X\backslash\{0\}) \\
&\Leftrightarrow Ax = 0 \quad (\forall x \in X\backslash\{0\}) \\
&\Leftrightarrow Ax = 0 \quad (\forall x \in X) \\
&\Leftrightarrow A = 0.
\end{aligned}$$

(N3) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{x \in X\backslash\{0\}} \dfrac{\|\lambda Ax\|_Y}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in X\backslash\{0\}} \dfrac{|\lambda|\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup\limits_{x \in X\backslash\{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\|A\|$.

(N4) Kako su A i B ograničeni operatori, vrijedi

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

$$\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|,$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
\|(A+B)x\| \quad &= \|Ax + Bx\|_Y \\
&\leq \|Ax\| + \|Bx\| \\
&\leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| \\
&= (\|A\| + \|B\|)\|x\|.
\end{aligned}$$

Na osnovu definicije norme sada zaključujemo da vrijedi

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

tj. zadovoljena je i nejednakost trougla.

Dakle, $\mathcal{L}(X, Y)$ je normiran vektorski prostor, pa je preostalo još da provjerimo njegovu kompletnost. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljan Cauchyev niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Na osnovu definicije Cauchyevog niza imamo

$$\|A_m - A_n\| \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

Kako je $\mathcal{L}(X,Y)$ vektorski prostor, onda je $A_m - A_n$ ograničen operator pa vrijedi

$$(\forall x \in X): \quad \|(A_m - A_n)x\| \leq \|A_m - A_n\|\|x\|,$$

zbog čega dalje imamo da za sve $x \in X$

$$\|A_m x - A_n x\| \to 0 \quad (m,n \to \infty).$$

To ustvari znači da je za svaki $x \in X$ niz $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev u Y, a kako je Y kompletan, ovi nizovi su i konvergentni u Y. Dakle, imamo

$$A_n x \to y \in Y \quad (n \to \infty),$$

tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): \quad n \geq n_0 \Rightarrow \|A_n x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definirajmo sada operator $A_0 : X \to Y$ koji svakom $x \in X$ pridružuje na navedeni način odgovarajući $y \in Y$, tj. koji svakom $x \in X$ pridružuje granicu niza $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$A_0 x = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Dokažimo da naš početni niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira upravo ka A_0. Za sve $x \in X$ imamo

$$\|(A_n - A_0)x\| = \|A_n x - A_0 x\| = \|A_n x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prisjetimo se da, na osnovu jedne od prethodnih teorema, normu operatora možemo računati i na sljedeći način:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

pa

$$\|A_n - A_0\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A_0)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

tj. dobili smo da je A_0 zaista granica niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konačno, provjerimo još da li $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Da je A_0 zaista linearan operator jasno je jer su svi A_n $(n \in \mathbb{N})$ linearni, pa imamo

$$\begin{aligned} A_0(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x_1 + \beta A_n x_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \beta \lim_{n\to\infty} A_n x_2 \\ &= \alpha A_0 x_1 + \beta A_0 x_2. \end{aligned}$$

Utvrdimo ograničenost operatora A_0. Ranije smo zaključili da $\|A_n - A_0\| < \varepsilon$, pa je $A_n - A_0$ ograničen operator. Kako je A_n ograničen operator, i $\mathcal{L}(X,Y)$

vektorski prostor, jasno je i da je A_0 ograničen. Dakle, dobili smo da zaista $A_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$, pa je $\mathcal{L}(X,Y)$ kompletan, pa time i Banachov prostor. ▲

ZADATAK 3.1.2 *Označimo sa* $\mathcal{C}^1[0,1]$ *prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija na* $[0,1]$.

a. Ispitati da li su preslikavanja $\|\cdot\|_1$ *i* $\|\cdot\|_2$ *norme na* $\mathcal{C}^1[a,b]$ *ako je*

$$\|f\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

$$\|f\|_2 = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|.$$

b. Dokazati da je sa $Df = f'$ *definiran linearan operator sa* $\mathcal{C}^1[0,1]$ *u* $\mathcal{C}[0,1]$, *te ispitati njegovu neprekidnost u odnosu na date norme.*

Rješenje:

a. Već smo ranije pokazivali da je preslikavanje $\|\cdot\|_1$ norma na $\mathcal{C}[0,1]$, pa su tim prije sve osobine norme zadovoljene i na skupu $\mathcal{C}^1[0,1] \subset \mathcal{C}[0,1]$. Provjerimo da li je $\|\cdot\|_2$ norma na $\mathcal{C}^1[0,1]$. Jasno je da je $\|\cdot\|_2$ realna funkcija, jer $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$, što znači da su funkcije f i f' neprekidne na segmentu $[0,1]$, pa dostižu svoju maksimalnu vrijednost. Provjerimo i osobine norme (N1)-(N4).

(N1) Jasno je da je prva osobina zadovoljena, jer je $\|f\|_2$ definirana kao zbir maksimuma nenegativnih vrijednosti, pa sigurno vrijedi $\|f\|_2 \geq 0$.

(N2) Druga osobina je zadovoljena jer

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| = 0 \\
&\Leftrightarrow \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = 0 \quad \wedge \quad \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| = 0 \\
&\Leftrightarrow |f(t)| = 0 \quad \wedge \quad |f'(t)| = 0 \quad (\forall t \in [0,1]) \\
&\Leftrightarrow f(t) = 0 \quad \wedge \quad f'(t) = 0 \quad (\forall t \in [0,1]) \\
&\Leftrightarrow f = 0 \quad \wedge \quad f(t) = C \quad (\forall t \in [0,1]) \\
&\Leftrightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

(N3) Treća osobina je trivijalno zadovoljena jer vrijedi

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_2 &= \max_{t\in[0,1]} |\lambda f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |\lambda f'(t)| \\
&= |\lambda| \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + |\lambda| \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\
&= |\lambda| (\max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|) \\
&= |\lambda| \|f\|_2.
\end{aligned}$$

(N4) Konačno, nejednakost trougla vrijedi jer

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_2 &= \max_{t\in[0,1]} |f(t)+g(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)+g'(t)| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} (|f(t)|+|g(t)|) + \max_{t\in[0,1]} (|f'(t)|+|g'(t)|) \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |g(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \max_{t\in[0,1]} |g'(t)| \\
&= (\max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|) + (\max_{t\in[0,1]} |g(t)| + \max_{t\in[0,1]} |g'(t)|) \\
&= \|f\|_2 + \|g\|_2.
\end{aligned}$$

Dakle, i preslikavanje $\|\cdot\|_2$ je norma na $\mathcal{C}^1[0,1]$. Štaviše, ovako definirano preslikavanje je uobičajena norma na $\mathcal{C}^1[0,1]$. Naime, normiran prostor $(\mathcal{C}^1[0,1]\|\cdot\|_2)$ posjeduje mnogo bolja svojstva nego prostor $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$, u što ćemo se moći uvjeriti već ispitivanjem neprekidnosti operatora $Df = f'$. Analogno, uobičajena norma na prostoru $\mathcal{C}^k[a,b]$ je

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| + \cdots + \max_{t\in[a,b]} |f^{(k)}(t)|.$$

b. Prvobitno provjerimo da li je $Df = f'$ dobro definisan. Neka je $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ proizvoljan. Po definiciji prostora $\mathcal{C}^1[0,1]$, funkcija f ima neprekidan prvi izvod, pa zaista vrijedi

$$Df = f' \in \mathcal{C}[0,1].$$

Sada prelazimo na ispitivanje linearnosti operatora D. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $f, g \in \mathcal{C}^1[0,1]$, i $\alpha, \beta \in \Phi$.

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha Df + \beta Dg,$$

pa je D zaista linearan, i to u oba prostora $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ i $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$, jer ustvari linearnost operatora zavisi samo od algebarske strukture prostora $\mathcal{C}^1[0,1]$, tj. operacija $+$ i $\cdot$ koje su u njemu definirane. Medjutim, operator D neće biti neprekidan u prostoru $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$, dok će biti neprekidan u $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$. Naime, posmatramo li niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1[0,1]$ definiran sa

$$f_n(t) = t_n,$$

imamo

$$\|Df_n\| = \|f_n'\| = \|nt^{n-1}\|_{\mathcal{C}[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} \|nt^{n-1}\| = n,$$

$$\|f_n\|_1 = \|t^n\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |t^n| = 1,$$

pa sigurno ne može postojati konstanta $M > 0$ tako da vrijedi

$$(\forall f \in \mathcal{C}^1[0,1]): \quad \|Df\|_{\mathcal{C}[0,1]} \leq M\|f\|_1.$$

Dakle, D nije ograničen operator u $(\mathcal{C}^1[a,b], \|\cdot\|_1)$, tj. nije neprekidan. S druge strane, posmatramo li D kao operator definiran nad prostorom $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$, imamo

$$\begin{aligned}\|Df\| &= \|f'\|_{\mathcal{C}[0,1]} \\ &= \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| \\ &= \|f\|_2.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$(\exists M = 1)(\forall f \in \mathcal{C}^1[0,1]): \quad \|Df\|_{\mathcal{C}[0,1]} \leq M\|f\|_2,$$

pa je D ograničen, odnosno neprekidan operator u $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$.

▲

ZADATAK 3.1.3 *Dokazati da je jednačinom*

a. $y(s) = \displaystyle\int_0^1 (1 - st)x(t)dt \quad (x \in L_2[0,1])$

b. $y(s) = \displaystyle\int_0^1 (st + \sin st)x(t)dt \quad (x \in L_2[0,1])$

definiran linearan neprekidan operator sa L_2 *u* L_2.

Rješenje:

a. Prvobitno pokažimo da je sa $Ax = y$ dobro definisan operator iz $L_2[0,1]$ u $L_2[0,1]$. Neka je $x \in L_2[0,1]$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora $L_2[0,1]$, x je Lebesgue integrabilna funkcija sa drugim stepenom, tj. vrijedi

$$\int_0^1 |x(t)|^2 < \infty.$$

Da bi pokazali da je A dobro definisan, dovoljno je pokazati da je i $y = Ax$ u $L_2[0,1]$. Na osnovu činjenice da apsolutna vrijednost integrala funkcije manja ili jednaka od integrala apsolutne vrijednosti funkcije, a potom i integralnog oblika Hölderove nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |y(s)|^2 ds &= \int_0^1 |\int_0^1 (1-st)x(t)dt|^2 ds \\
&\leq \int_0^1 (\int_0^1 |1-st||x(t)|dt)^2 ds \\
&\leq \int_0^1 [(\int_0^1 |1-st|^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}]^2 ds \\
&\leq \int_0^1 [(\int_0^1 dt)^{\frac{1}{2}} \|x\|]^2 ds \\
&= \int_0^1 \|x\|^2 ds \\
&= \|x\|^2 \int_0^1 ds \\
&= \|x\|^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

što je upravo ekvivalentno činjenici da $y \in L_2[0,1]$. Predjimo na dokazivanje linearnosti operatora A. Posmatrajmo proizvoljne $x_1, x_2 \in L_2[0,1]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kako su $x_1, x_2 \in L_2[0,1]$, postoje integrali $y_1(s) = \int_0^1 (1-st)x_1(t)dt$ i $y_2(s) = \int_0^1 (1-st)x(t)dt$. Stoga imamo

$$\begin{aligned}
A(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \int_0^1 (1-st)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))dt \\
&= \int_0^1 (1-st)\alpha x_1(t)dt + \int_0^1 (1-st)\beta x_2(t)dt \\
&= \alpha \int_0^1 (1-st)x_1(t)dt + \beta \int_0^1 (1-st)x_2(t)dt \\
&= \alpha A x_1 + \beta A x_2,
\end{aligned}$$

pa je A zaista linearan operator. Da je A neprekidan, odnosno ograničen operator, možemo se uvjeriti iz već navedene relacije

$$\|Ax\| = \|y\| = (\int_0^1 |y(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \leq (\|x\|^2)\frac{1}{2} = \|x\|,$$

jer to znači da

$$(\exists M = 1)(\forall x \in L_2[0,1]): \quad \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

b. Prvobitno pokažimo da je sa $Ax = y$ dobro definisan operator iz $L_2[0,1]$ u $L_2[0,1]$. Neka je $x \in L_2[0,1]$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora $L_2[0,1]$, x je Lebesgue integrabilna funkcija sa drugim stepenom, tj. vrijedi

$$\int_0^1 |x(t)|^2 < \infty.$$

Da bi pokazali da je A dobro definisan, dovoljno je pokazati da je i $y = Ax$ u $L_2[0,1]$. Na osnovu činjenice da apsolutna vrijednost integrala funkcije manja ili jednaka od integrala apsolutne vrijednosti funkcije, a potom i integralnog oblika Hölderove nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |y(s)|^2 ds &= \int_0^1 |\int_0^1 (st + \sin st)x(t)dt|^2 ds \\
&\leq \int_0^1 (\int_0^1 |st + \sin st||x(t)|dt)^2 ds \\
&\leq \int_0^1 [(\int_0^1 |st + \sin st|^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}]^2 ds \\
&\leq \int_0^1 [(\int_0^1 (|st| + |\sin st|)^2 dt)^{\frac{1}{2}} \|x\|]^2 ds \\
&\leq \int_0^1 [(\int_0^1 2^2 dt)^{\frac{1}{2}} \|x\|]^2 ds \\
&= \int_0^1 4\|x\|^2 ds \\
&= 4\|x\|^2 \int_0^1 ds \\
&= 4\|x\|^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

što je upravo ekvivalentno činjenici da $y \in L_2[0,1]$. Predjimo na dokazivanje linearnosti operatora A. Posmatrajmo proizvoljne $x_1, x_2 \in L_2[0,1]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kako su $x_1, x_2 \in L_2[0,1]$, postoje integrali $y_1(s) = \int_0^1 (st +$

$\sin st)x_1(t)dt$ i $y_2(s) = \int_0^1 (st + \sin st)x(t)dt$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} A(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \int_0^1 (st + \sin st)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))dt \\ &= \int_0^1 (st + \sin st)\alpha x_1(t)dt + \int_0^1 (st + \sin st)\beta x_2(t)dt \\ &= \alpha \int_0^1 (st + \sin st)x_1(t)dt + \beta \int_0^1 (st + \sin st)x_2(t)dt \\ &= \alpha A x_1 + \beta A x_2, \end{aligned}$$

pa je A zaista linearan operator. Da je A neprekidan, odnosno ograničen operator, možemo se uvjeriti iz već navedene relacije

$$\|Ax\| = \|y\| = (\int_0^1 |y(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \leq (4\|x\|^2)\frac{1}{2} = 2\|x\|,$$

jer to znači da

$$(\exists M = 2)(\forall x \in L_2[0,1]) : \quad \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

▲

ZADATAK 3.1.4 *Neka je $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ konvergentan numerički red sa pozitivnim članovima, te $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dokazati da je sa $y = Ax$, pri čemu je*

$$y_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_{n+i} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definiran ograničen linearan operator $A : c_0 \to c_0$.

Rješenje: Prvobitno pokažimo da je sa $Ax = y$ dobro definiran operator iz c_0 u c_0. Neka je $x \in c_0$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora c_0, $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je niz koji konvergira ka nuli, tj. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Da bi pokazali da je A dobro definisan, dovoljno je pokazati da je i $y = Ax$ u c_0, tj. da niz $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nuli. Poznato je da je limes zbira jednak zbiru limesa

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N} a_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{N}\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}.$$

Pustimo li da $N \to \infty$, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}.$$

Na osnovu toga imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_{n+i} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty}(\alpha_i x_{n+i}) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \lim_{n\to\infty} x_{n+i} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

što je upravo ekvivalentno činjenici da $y \in c_0$. Predjimo na dokazivanje linearnosti operatora A. Posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (x_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, x_2 = (x_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$, i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Operator A je dobro definiran, pa je svaki red $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_i^{(k)}$ konvergentan ($n \in \mathbb{N}, k \in \{1,2\}$). Stoga je dozvoljeno razdvajanje suma koje ćemo uraditi, a kako su u vektorskom prostoru zadovoljene sve potrebne osobine asocijativnosti i distributivnosti, imamo

$$\begin{aligned}
A(\lambda x_1 + \mu x_2) &= (\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i(\lambda x_{n+i}^{(1)} + \mu x_{n+i}^{(2)}))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \lambda x_{n+i}^{(1)} + \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \mu x_{n+i}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (\lambda \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_{n+i}^{(1)} + \mu \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_{n+i}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_{n+i}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} + \mu(\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} \alpha_i x_{n+i}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \alpha A x_1 + \beta A x_2,
\end{aligned}$$

pa je A zaista linearan operator. Dokažimo ograničenost. Kako je po pretpostavci red $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ konvergentan, vrijedi

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i = S < \infty.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \|y\|_{c_0} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_{n+i}| \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i x_{n+i}| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i |x_{n+i}| \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \|x\| \\
&= \|x\| \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \\
&= \|x\| \cdot S,
\end{aligned}$$

što znači da je A ograničen operator. ▲

ZADATAK 3.1.5 *Neka su $x = (\xi_i)_{i=0}^{\infty} \in l_2$, $y = (\eta_i)_{i=0}^{\infty}$. Dokazati da je sa $y = Ax$, pri čemu je*

$$\eta_i = \frac{1}{3^i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \xi_k, \quad (i \in \mathbb{N}_0)$$

definiran neprekidan linearan operator $A : l_2 \to l_2$, te odrediti normu operatora A.

Rješenje: Prvobitno pokažimo da je sa $Ax = y$ dobro definiran operator iz l_2 u l_2. Neka je $x \in l_2$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_2, x je sumabilan red sa drugim stepenom, tj. vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty.$$

Da bi pokazali da je A dobro definisan, dovoljno je pokazati da je i $y = Ax$ u l_2. Kako vrijedi

$$|\sum_{k=0}^{N} a_k b_k| \le \sum_{k=0}^{N} |a_k b_k|,$$

pustimo li da $N \to \infty$ dobijamo

$$\lim_{N\to\infty} |\sum_{k=0}^{N} a_k b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k|.$$

Kako je apsolutna vrijednost neprekidna funkcija, vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} |\sum_{k=0}^{N} a_k b_k| = |\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k b_k| = |\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k|,$$

pa je sada jasno da vrijedi

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k|.$$

Zbog posljednje relacije, te Hölderove nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} |\frac{1}{3^i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\xi_k|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} |\frac{1}{3^i}|^2 |\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\xi_k|^2 \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{9})^i (\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{1}{3^k}||\xi_k|)^2 \\
&\leq \tfrac{1}{1-\frac{1}{9}} [(\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{1}{3^k}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \\
&= \tfrac{9}{8}[(\tfrac{9}{8})^{\frac{1}{2}} \|x\|]^2 \\
&= (\tfrac{9}{8})^2 \|x\|^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

što je upravo ekvivalentno činjenici da $y \in l_2$. Predjimo na dokazivanje linearnosti operatora A. Posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i=0}^{\infty}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i=0}^{\infty} \in l_2$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kako za $i \in \{1, 2\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\xi_k^{(i)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\frac{1}{3^k}\xi_k^{(i)}| \\
&\leq (\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{1}{3^k}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k^{(i)}|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\tfrac{9}{8})^{\frac{1}{2}} \|x\| \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

dozvoljeno je razdvajanje suma, tj. imamo

$$\begin{aligned}
A(\alpha x_1+\beta x_2) &= (\tfrac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}(\alpha\xi_k^{(1)}+\beta\xi_k^{(2)}))_{i=0}^{\infty}\\
&= (\tfrac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\alpha\xi_k^{(1)}+\frac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\beta\xi_k^{(2)})_{i=0}^{\infty}\\
&= (\alpha\tfrac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\xi_k^{(1)}+\beta\frac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\xi_k^{(2)})_{i=0}^{\infty}\\
&= \alpha(\tfrac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\xi_k^{(1)})_{i=0}^{\infty}+\beta(\frac{1}{3^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\xi_k^{(2)})_{i=0}^{\infty}\\
&= \alpha Ax_1+\beta Ax_2,
\end{aligned}$$

pa je A zaista linearan operator. Da je A neprekidan, odnosno ograničen operator, možemo se uvjeriti iz već navedene relacije

$$\|Ax\|=\|y\|=(\sum_{i=0}^{\infty}|y_i|^2)^{\frac{1}{2}}\leq[(\frac{9}{8})^2\|x\|^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{8}\|x\|,$$

jer to znači da

$$(\exists M=\frac{9}{8})(\forall x\in l_2):\quad \|Ax\|\leq\frac{9}{8}\|x\|.$$

Na osnovu definicije norme operatora i posljednje relacije možemo zaključiti da je

$$\|A\|\leq\frac{9}{8}.$$

Pokazati ćemo da vrijedi i

$$\|A\|\geq\frac{9}{8},$$

čime ćemo dobiti da je norma operatora A upravo jednaka $\frac{9}{8}$. Na osnovu teorema o normi operatora, imamo

$$\|A\|=\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\geq\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|},$$

pri čemu je x_0 bilo koji element iz $X\setminus\{0\}$. Izbor željenog $x_0\in X\setminus\{0\}$ takvog da

$$\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}=M$$

je obično jednostavan, i sam se po sebi nameće. U ovom primjeru biramo $x_0\in l_2$ na sljedeći način

$$x_0=(\xi_i^{(0)})_{i=0}^{\infty}=(\frac{1}{3^i})_{i=0}^{\infty}\in l_2.$$

Neophodno je uvijek prvobitno provjeriti da li je x_0 element posmatranog prostora, a ovdje je to sigurno zadovoljeno jer

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i^{(0)}|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\frac{1}{3^i}|^2 = \frac{9}{8},$$

pa je zaista $x_0 \in l_2$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\|Ax_0\| &= (\sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i^{(0)}|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{i=0}^{\infty} |\frac{1}{3^i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \xi_k^{(0)}|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{i=0}^{\infty} |\frac{1}{3^i}|^2 | \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \frac{1}{3^k}|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\frac{9}{8}|\frac{9}{8}|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \tfrac{9}{8}\sqrt{\tfrac{9}{8}},
\end{aligned}$$

$$\|x_0\| = (\sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i^{(0)}|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=0}^{\infty} |\frac{1}{3^i}|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{8}},$$

pa imamo

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \frac{\frac{9}{8}\sqrt{\frac{9}{8}}}{\sqrt{\frac{9}{8}}} = \frac{9}{8}.$$

Dakle, norma operatora A iznosi $\|A\| = \frac{9}{8}$. ▲

ZADATAK 3.1.6 *Dokazati da je sa*

a. $F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$

b. $F(f)(t) = tf(t)$

definiran neprekidan linearan operator $F : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$, *te naći njegovu normu.*

Rješenje:

a. Kako je integral neprekidne funkcije i sam neprekidna funkcija, $F(f) \in \mathcal{C}[a,b]$, tj. F je dobro definirano preslikavanje. Ispitajmo linearnost. Neka su $f_1, f_2 \in \mathcal{C}[a,b]$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Kako su f_1 i f_2 neprekidne funkcije, postoje integrali $\int_a^x f_1(t)dt$ i $\int_a^x f_2(t)dt$, pa

$$\begin{aligned} F(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= \int_a^x (\alpha f_1 + \beta f_2)(t)dt \\ &= \alpha \int_a^x f_1(t)dt + \beta \int_a^x f_2(t)dt \\ &= \alpha F(f_1)(x) + \beta F(f_2)(x) \end{aligned}$$

Dakle, F je linearan operator.

$$\begin{aligned} \|F(f)\| &= \max_{x\in[a,b]} |F(f)(x)| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |\int_a^x f(t)dt| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^x |f(t)|dt \\ &= \int_a^b |f(t)|dt \\ &\leq \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |f(t)|dt \\ &= \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_a^b dt \\ &= \|f\|(b-a) \end{aligned}$$

Zaključujemo da je F ograničen operator, te da je $\|F\| \leq b-a$. Posmatrajmo neprekidnu funkciju $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} \|F(f_0)\| &= \max_{x\in[a,b]} |F(f_0)(x)| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |\int_a^x f_0(t)dt| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |\int_a^x dt| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |x-a| \\ &= \max_{x\in[a,b]} (x-a) \\ &= b-a, \end{aligned}$$

i

$$\|f_0\| = \max_{x\in[a,b]} |f_0(x)| = 1,$$

pa imamo

$$\|F\| = \sup_{f\in\mathcal{C}[a,b]\setminus\{0\}} \frac{\|F(f)\|}{\|f\|} \geq \frac{\|F(f_0)\|}{\|f_0\|} = \frac{b-a}{1} = b-a.$$

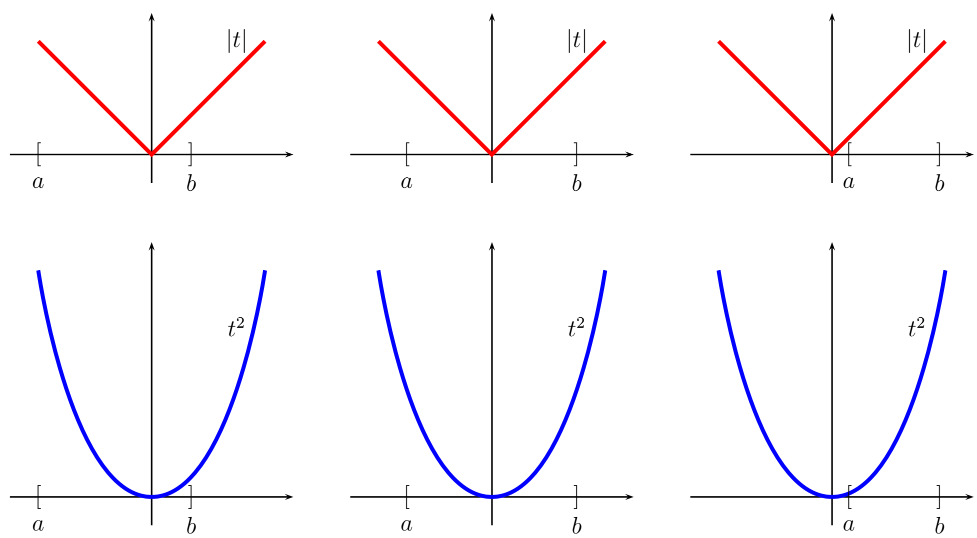
Dobili smo da je $\|F\| \le b-a$, i $\|F\| \ge b-a$, pa je $\|F\| = b-a$.

b. Ako je f neprekidna funkcija, onda je neprekidna i funkcija $tf(t)$ kao proizvod neprekidnih funkcija, pa $F(f) \in \mathcal{C}[a,b]$, tj. F je dobro definirano preslikavanje. Ispitajmo linearnost. Neka su $f_1, f_2 \in \mathcal{C}[a,b]$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni.

$$\begin{aligned} F(\alpha f_1 + \beta f_2)(t) &= t(\alpha f_1 + \beta f_2)(t) \\ &= \alpha t f_1(t) + \beta t f_2(t) \\ &= \alpha F(f_1)(t) + \beta F(f_2)(t) \end{aligned}$$

Dakle, F je linearan operator.

$$\begin{aligned} \|F(f)\| &= \max_{t\in[a,b]} |F(f)(t)| \\ &= \max_{t\in[a,b]} |tf(t)| \\ &= \max_{t\in[a,b]} |t||f(t)| \\ &\le \max_{t\in[a,b]} |t| \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \\ &= \max\{|a|,|b|\}\|f\| \end{aligned}$$



Zaključujemo da je F ograničen operator, te da je $\|F\| \le \max\{|a|,|b|\}$. Posmatrajmo neprekidnu funkciju $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = t$. Tada je

$$\begin{aligned} \|F(f_0)\| &= \max_{t\in[a,b]} |F(f_0)(t)| \\ &= \max_{t\in[a,b]} |tf_0(t)| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |t^2| \\ &= \max\{a^2, b^2\}, \end{aligned}$$

i
$$\|f_0\| = \max_{x\in[a,b]} |f_0(x)| = \max_{x\in[a,b]} |t| = \max\{|a|, |b|\},$$

pa imamo

$$\|F\| = \sup_{f\in\mathcal{C}[a,b]\setminus\{0\}} \frac{\|F(f)\|}{\|f\|} \geq \frac{\|F(f_0)\|}{\|f_0\|} = \frac{\max\{a^2, b^2\}}{\max\{|a|, |b|\}} = \max\{|a|, |b|\}.$$

Dobili smo da je $\|F\| \leq \max\{|a|, |b|\}$, i $\|F\| \geq \max\{|a|, |b|\}$, pa je $\|F\| = \max\{|a|, |b|\}$.

▲

ZADATAK 3.1.7 *Neka je $1 \leq p < \infty$. Na prostoru l_p posmatrajmo ograničene linearne operatore desni-shift i lijevi-shift*

$$D(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...),$$

$$L(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Izračunati norme ovih operatora.

Rješenje: Već u zadatku navedeno je da su D i L ograničeni linearni operatori, pa to ne trebamo ispitivati, i možemo odmah prijeći na nalaženje njihovih normi. Neka je $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$ proizvoljan, i $y = Dx$.

$$\|Dx\| = \|y\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=2}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|$$

Dakle, za sve $x \in l_p$ vrijedi
$$\frac{\|Dx\|}{\|x\|} = 1,$$
pa je
$$\|D\| = \sup_{x\in l_p\setminus\{0\}} \frac{\|Dx\|}{\|x\|} = 1.$$

Ako je $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$, i $y = Lx$, imamo

$$\|Lx\| = \|y\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|,$$

pa $\|L\| \leq 1$. Posmatrajmo niz $x_0 = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ...)$. Kako je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(0)}|^p = 0^p + 1^p + (\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{2^2})^p + (\frac{1}{2^3})^p + ... = \sum_{i=0}^{n} (\frac{1}{2^p})^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^p}} < \infty,$$

x_0 je niz sumabilan sa stepenom p, tj. $x_0 \in l_p$, te dalje imamo

$$\|Lx_0\| = \|y_0\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^{(0)}|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^p})^i)^{\frac{1}{p}} = (\frac{1}{1 - \frac{1}{2^p}})^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x_0\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(0)}|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^p})^i)^{\frac{1}{p}} = (\frac{1}{1 - \frac{1}{2^p}})^{\frac{1}{p}}.$$

Stoga je

$$\|L\| = \sup_{x \in l_p \setminus \{0\}} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Lx_0\|}{\|x_0\|} = \frac{(\frac{1}{1-\frac{1}{2^p}})^{\frac{1}{p}}}{(\frac{1}{1-\frac{1}{2^p}})^{\frac{1}{p}}} = 1,$$

pa konačno možemo zaključiti i da je $\|L\| = 1$. ▲

3.2 Inverzni operator

Definicija 3.2.1 *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Ako za sve $y \in R_A$ jednačina $y = Ax$ ima jedinstveno rješenje $x \in D_A$, kažemo da postoji inverzno preslikavanje preslikavanja A. Pišemo $x = A^{-1}y$.*

Dakle, za postojanje inverznog operatora linearnog operatora $A : D_A \to R_A$ dovoljno je da A bude injektivno preslikavanje, tj. da vrijedi

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Teorem 3.2.1 *Ako postoji, inverzni operator linearnog operatora je i sam linearan operator.*

Teorem 3.2.2 (BANACHOV TEOREM O INVERZNOM OPERATORU) *Neka su X i Y Banachovi prostori, i neka je $A : X \to Y$ injektivan ograničen linearan operator. Tada je i inverzni operator A^{-1} takodjer ograničen.*

Navedeni teoremi korisni su u zadacima utoliko što nam omogućavaju da odmah zaključimo da, ukoliko postoji inverzni operator A^{-1} ograničenog linearnog operatora $XA : X \to Y$, je i sam A^{-1} ograničen i linearan, bez da to eksplicitno provjeravamo. Pri tome treba paziti da X i Y moraju biti Banachovi prostori, iz uslova teorema.

ZADATAK 3.2.1 *Neka je X podprostor Banachovog prostora $\mathcal{C}[0,1]$ sa $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ koji sadrži sve funkcije $x(t)$ koje imaju neprekidan prvi i drugi izvod i $x(0) = x(1) = 0$. Definišimo operator $A : X \to \mathcal{C}[0,1]$ sa*

$$Ax = x".$$

a. Dokazati da je A linearan operator.

b. Neka je $y \in \mathcal{C}[0,1]$ proizvoljan i neka je

$$K(s,t) = \begin{cases} -t(1-s), & 0 \le t \le s \\ -s(1-t), & s \le t \le 1 \end{cases} \quad ; \quad s \in [0,1].$$

Pokazati da je $x(s) = \int_0^1 K(s,t)y(t)dt$ dobro definisan, tj. da $x \in X$, i da $Ax = y$.

c. Pokazati da postoji $A^{-1} : \mathcal{C}[0,1] \to X$.

d. Dokazati da je $\|A^{-1}\| < 1$ i naći sva rješenja jednačine

$$Ax = x$$

Rješenje:

a. Pokažimo prvobitno da je $A : X \to \mathcal{C}[a,b]$ dobro definiran operator. Neka je $x \in X$. Kako po pretpostavci x ima neprekidan drugi izvod, vrijedi

$$Ax = x" \in \mathcal{C}[a,b],$$

pa je A dobro definiran. Dokažimo linearnost. Neka su $x_1, x_2 \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

$$\begin{aligned} A(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (\alpha x_1 + \beta x_2)" \\ &= \alpha x_1" + \beta x_2" \\ &= \alpha A x_1 + \beta A x_2, \end{aligned}$$

pa je A linearan operator.

b. x je, kao integral neprekidne funkcije, i sam neprekidna funkcija, tj.

$x \in \mathcal{C}[0,1]$. Kako vrijedi

$$
\begin{aligned}
&x(s) = \int_0^1 K(s,t)y(t)dt \\
&x(s) = \int_0^s K(s,t)y(t)dt + \int_s^1 K(s,t)y(t)dt \\
&x(s) = -(1-s)\int_0^s ty(t)dt - s\int_s^1 (1-t)y(t)dt \\
&x(s) = (s-1)\int_0^s ty(t)dt - s\int_s^1 y(t)dt + s\int_s^1 ty(t)dt,
\end{aligned}
$$

jasno je da $x(0) = x(1) = 0$, te da

$$
\begin{aligned}
x'(s) &= \int_0^s ty(t)dt + (s-1)ty(t)|_0^s - \int_s^1 y(t)dt - sy(t)|_s^1 \\
&\quad + \int_s^1 ty(t)dt + sty(t)|_s^1 \\
&= \int_0^s ty(t)dt + (s-1)sy(s) - \int_s^1 y(t)dt - s[y(1)-y(s)] \\
&\quad + \int_s^1 ty(t)dt + s[y(1) - sy(s)] \\
&= \int_0^s ty(t)dt + s^2y(s) - sy(s) - \int_s^1 y(t)dt - sy(1) + sy(s) \\
&\quad + \int_s^1 ty(t)dt + sy(1) - s^2y(s) \\
&= \int_0^s ty(t)dt - \int_s^1 y(t)dt + \int_s^1 ty(t)dt,
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&x"(s) = ty(t)|_0^s - y(t)|_s^1 + ty(t)|_s^1 \\
&x"(s) = sy(s) - [y(1) - y(s)] + [y(1) - sy(s)] \\
&x"(s) = sy(s) - y(1) + y(s) + y(1) - sy(s) \\
&x"(s) = y(s),
\end{aligned}
$$

pa su x'i $x"$ očigledno neprekidne funkcije. Dakle, na osnovu definicije skupa X, imamo $x \in X$, a iz ranije izloženog uočavamo da vrijedi i $Ax = y$.

c. Dovoljan uslov za egzistenciju $A^{-1} : \mathcal{C}[0,1] \to X$ jeste da je A injekcija, odnosno da vrijedi

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

Neka je $x \in X$ takav da $Ax = 0$. $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ je stoga neprekidna funkcija, kao i funkcije x' i $x"$, te vrijedi $x(0) = x(1) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&\quad Ax = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x" = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x' = C_1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = C_1 t + C_2,
\end{aligned}
$$

no zbog $x(0) = x(1) = 0$, zaključujemo da je $C_2 = C_1 = 0$, pa je $x = 0$. Dakle, A je injekcija, pa postoji inverzni operator A^{-1}.

d. Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da postoji A^{-1} i da vrijedi $A^{-1}(y)(s) = x(s) = \int_0^1 K(s,t)y(t)dt$. Pokažimo prvobitno da je $\|A^{-1}\| < 1$.

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}y\| &= \|x\| \\
&= \max_{s\in[0,1]} |x(s)| \\
&= \max_{s\in[0,1]} |\int_0^1 K(s,t)y(t)dt| \\
&\le \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 |K(s,t)||y(t)|dt \\
&\le \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 |K(s,t)| \max_{t\in[0,1]} |y(t)|dt \\
&= \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 |K(s,t)|\|y\|dt \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} [\int_0^s t(1-s)dt + \int_s^1 s(1-t)dt] \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} [(1-s)\int_0^s tdt + s\int_s^1 dt - s\int_s^1 tdt] \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} [(1-s)\frac{t^2}{2}|_0^s + st|_s^1 - s\frac{t^2}{2}|_s^1] \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} [(1-s)\frac{s^2}{2} + s(1-s) - s(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2})] \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} [\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{2} + s - s^2 - \frac{s}{2} + \frac{s^3}{2}] \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} [\frac{s}{2} - \frac{s^2}{2}] \\
&= \|y\| \max_{s\in[0,1]} \frac{1}{2}s(1-s) \\
&= \tfrac{1}{2}\|y\| \max_{s\in[0,1]} (s-s^2)
\end{aligned}$$

Kako za funkciju $f(s) = s - s^2$ vrijedi $f'(s) = 1 - 2s$, njen maksimum je $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Stoga

$$\|A^{-1}y\| \le \frac{1}{2}\|y\|\frac{1}{4} = \frac{1}{8}\|y\|$$

pa je po definicije norme $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{8} < 1$. Preostalo je da još pronadjemo rješenja jednačine $Ax = x$.

$$\begin{aligned}
& Ax = x \\
\Leftrightarrow\ & x'' = x \\
\Leftrightarrow\ & x'' - x = 0
\end{aligned}$$

Potražimo rješenje navedene diferencijalne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} & x = e^{\lambda t} \\ \Rightarrow \quad & x' = \lambda e^{\lambda t} \\ \Rightarrow \quad & x" = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x" - x = 0 \quad & \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} - e^{\lambda t} = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \vee \quad \lambda = 1, \end{aligned}$$

pa je opće rješenje $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t$.

▲

ZADATAK 3.2.2 *Neka je $F \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[0,1], \mathcal{C}[0,1])$ operator definiran sa*

$$F(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Ako je $X = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \ f(0) = 0\}$, ispitati linearnost i ograničenost operatora $F^{-1} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{C}[0,1])$.

Rješenje: Pokažimo prvobitno da F^{-1} zaista postoji, za što nam je dovoljno da pokažemo injektivnost operatora F. Neka je $f \in \mathcal{C}[a,b]$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} F(f) = 0 \quad & \Leftrightarrow F(f)(x) = 0 \quad (\forall x \in [0,1]) \\ & \Leftrightarrow \textstyle\int_0^x f(t)dt = 0 \quad (\forall x \in [0,1]) \\ & \Rightarrow (\textstyle\int_0^x f(t)dt)' = 0 \quad (\forall x \in [0,1]) \\ & \Leftrightarrow f(x) - f(0) = 0 \quad (\forall x \in [0,1]) \\ & \Leftrightarrow f(x) = f(0) \quad (\forall x \in [0,1]), \end{aligned}$$

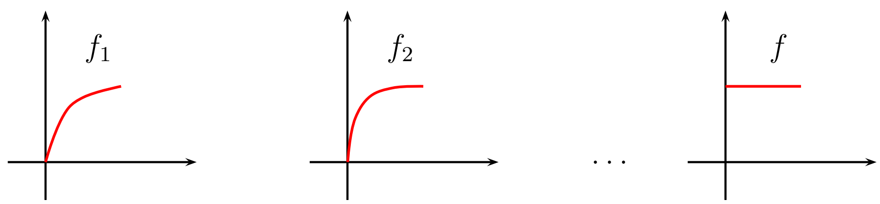
tj. f je konstantna funkcija $f(x) = C$. Medjutim, kako za sve $x \in [0,1]$ vrijedi $\int_0^x f(t)dt = 0$, imamo

$$0 = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 Cdt = C \int_0^1 dt = C,$$

pa $f = 0$, odnosno F je injektivan operator. Odredimo skup vrijednosti R_F preslikavanja $F : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$. To su sve neprekidne funkcije koje su integral neke neprekidne funkcije, a kako

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0),$$

svaka neprekidna funkcija f za koju $f(0) = 0$ je integral funkcije f', pa je $R_F = X$. Dakle, $F^{-1} : X \to \mathcal{C}[a, b]$ postoji, a kako je još od ranije poznato da su diferenciranje i integriranje medjusobno inverzne operacije, jasno je da jasno je da F^{-1} definiramo sa $F^{-1}g = g'$ (A može se jednostavno i direktno provjeriti i da $g(x) = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f(x) = g'(x)$.) Na osnovu prvog teorema u ovoj sekciji, zaključujemo i da je F^{-1} linearan operator, pa to ne trebamo eksplicitno ispitivati. S druge strane, u nekom od ranijih primjera pokazali smo da F^{-1} nije ograničen. (Primjetite da se ovdje nismo mogli pozvati na drugi teorem u ovoj sekciji i zaključiti i da je F^{-1} ograničen, jer prostor X nije Banachov. Da bi to utvrdili, posmatrajte niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ definiranih sa $f_n(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^{2n}}$.)



▲

3.3 O još dva principa

U skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)" u ovoj sekciji naveden je jedan važan rezultat funkcionalne analize, poznat kao Banach-Steinhausov stav. Teorem je naveden i detaljno dokazan u vidu dva odvojena teorema - principa uniformne ograničenosti i principa konvergencije, te se zbog svojih važnosti i interesantnosti dokaza studenti upućuju na skriptu. Zadatke ćemo u ovoj sekciji izostaviti.

3.4 Zatvoreni operator

Na Descartes-ovom proizvodu $X \times Y$ Banachovih prostora X i Y uvedimo unutrašnju operaciju sabiranja i vanjsku operacija množenja skalarom na sljedeći način:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_2, y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

i normu sa

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Jednostavno se provjerava da je $(X \times Y, +, \cdot)$ Banachov prostor (preporučuje se studentima za vježbu).

Definicija 3.4.1 (GRAF OPERATORA) *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Skup*
$$G_A = \{(x, Ax) | x \in D_A\} \subseteq X \times Y$$
naziva se graf operatora A.

Definicija 3.4.2 (ZATVOREN OPERATOR) *Neka su X i Y Banachovi prostori, i $A : X \to Y$ linearan operator. A je zatvoren operator akko je G_A zatvoren skup u $X \times Y$.*

Teorem 3.4.1 (KARAKTERIZACIJA ZATVORENOSTI OPERATORA) *Neka su X i Y Banachovi prostori, i $A : X \to Y$ linearan operator. A je zatvoren operator akko iz*
$$x_n \to x_0 \quad \wedge \quad Ax_n \to y_0 \quad (n \to \infty) \quad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A)$$
slijedi $x_0 \in D_A$ i $Ax_0 = y_0$.

U ovoj sekciji skripte "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2009/2009)" navedeno je još nekoliko značajnih teorema o potrebnim i dovoljnim uslovima da bi operator dopuštao zatvorenje, te vezi neprekidnih i zatvorenih operatora.

ZADATAK 3.4.1 *Posmatrajmo normirane prostore $X = \mathcal{C}^1[a, b]$, $Y = \mathcal{C}[a, b]$, pri čemu je u oba prostora norma definirana sa $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Definirajmo linearni operator $D : \mathcal{C}^1[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$ sa $Df = f'$. Dokazati da je D zatvoren operator.*

Rješenje: Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X takav da
$$x_n \to x_0 \quad \wedge \quad Ax_n \to y_0 \quad (n \to \infty).$$
Da bi dokazali da je A zatvoren operator, dovoljno je da pokažemo da vrijedi $x_0 \in X$ i $Ax_0 \to y_0$. ..., pa je D zaista zatvoren. (Prisjetite se da ovako definiran operator nije ograničen, ali da se to ipak ne suprostavljava teoremu iz skripte koji tvrdi da zatvoren linearan operator definiran na Banachovom prostoru mora biti neprekidan. Naime, $\mathcal{C}^1[0, 1]$ sa uvedenom normom nije Banachov, u što se možemo uvjeriti posmatrajući naprimjer neku funkciju $f \notin \mathcal{C}^1[a, b]$, te niz polinoma koji toj funkciji teže.)▲

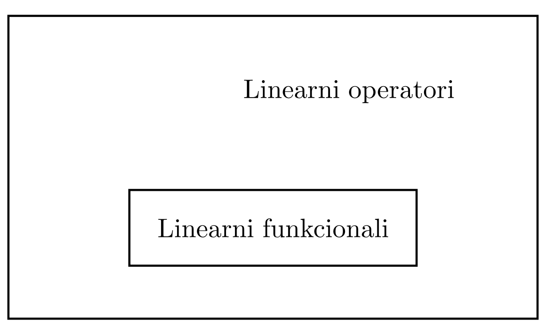
Poglavlje 4

Linearni funkcionali

Nakon uvodjenja mnoštva pojmova neophodnih za funkcionalnu analizu, u ovom poglavlju napokon su navedeni neki od najznačajnih rezultata ove oblasti. U prvom dijelu studenti/ce se trebaju upoznati sa pojmom funkcionala, te znati utvrditi da li su odredjeni funkcionali linearni i ograničeni, i naći njihovu normu. U drugom dijelu naveden je Hahn-Banachov teorem i njegove posljedice, pa je neophodno njihovo razumijevanje kako bi se isti mogli primjeniti u zadacima iz ove sekcije. U završnom dijelu poglavlja zbog svoje su značajnosti navedeni rezultati koji nam daju informaciju o obliku svih linearnih ograničenih funkcionala na pojedinim Banachovim prostorima, te je uveden iznimno zanimljiv pojam slabe konvergencije.

Funkcionali su samo posebna vrsta operatora. Naime:

Definicija 4.0.3 (FUNKCIONAL) *Neka je X proizvoljan linearan vektorski prostor. Funkcional je proizvoljno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*



Dakle, funkcional je "lijepa" vrsta operatora, koja proizvoljne prostore uvijek slika u polje skalara, tj. $Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Stoga, sve što vrijedi za operatore, vrijedi i za funkcionale. Tako se analogno definiraju pojmovi poput linearan, ograničen ili neprekidan funkcional, te norma funkcionala, a važe i svi rezultati iz prethodnog poglavlja. Te definicije će sada samo biti nešto jednostavnije, jer je norma u $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ uobičajena Euklidska norma, tj. za sve $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ vrijedi $\|x\| = |x|$. Tako, ako bismo htjeli naprimjer definirati ograničen funkcional imali bismo sljedeću definiciju

Definicija 4.0.4 (OGRANIČEN FUNKCIONAL) *Neka je $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ linearan funkcional. f je ograničen funkcional ako vrijedi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X): \quad |f(x)| \leq M\|x\|.$$

Infimum svih brojeva M za koje važi navedena relacija je norma operatora f, u oznaci $\|f\|$.

ZADATAK 4.0.2 *Dokazati da su sljedeća preslikavanja linearni funkcionali:*

a. $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, *gdje je* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ *prozivoljan i fiksiran.*

b. $X = \mathcal{C}[a,b]$, $f(x) = \int_a^b x(t)dt$

c. $X = \mathcal{C}[a,b]$, $f(x) = x(t_0)$, *gdje je* $t_0 \in [a,b]$ *proizvoljan i fiksiran.*

d. $X = l_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $f(x) = \xi_k$, *gdje je* $k \in \mathbb{N}$ *proizvoljan i fiksiran.*

Rješenje:

a. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer je $f(x)$ definiran kao konačna suma realnih brojeva. Uvjerimo se i u linearnost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}), x_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}) \in \mathbb{R}^n$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha x_i^{(1)} + \beta x_i^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(1)} + \beta \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

pa je f zaista linearan funkcional.

b. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in \mathcal{C}[a,b]$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer je svaka neprekidna funkcija integrabilna. Uvjerimo se i u linearnost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathcal{C}[a,b]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \int_a^b (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))dt \\ &= \alpha \int_a^b x_1(t)dt + \beta \int_a^b x_2(t)dt \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

pa je f zaista linearan funkcional.

c. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in \mathcal{C}[a,b]$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer x realna funkcija. Uvjerimo se i u linearnost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathcal{C}[a,b]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (\alpha x_1 + \beta x_2)(t_0) \\ &= \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

pa je f zaista linearan funkcional.

d. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in l_p$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer x niz realnih brojeva. Uvjerimo se i u linearnost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, x_2 = (x_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_k^{(1)} + \beta x_k^{(2)} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),$$

pa je f zaista linearan funkcional.

▲

ZADATAK 4.0.3 *Dokazati da je sa*

a. $f(x) = 2\xi_1 - \xi_3 + 5\xi_5 \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1)$

b. $f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_{2i} \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1)$

c. $f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\xi_i}{i} \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1)$

dobro definiran linearan neprekidan funkcional u l_1, te naći njegovu normu.

Rješenje:

a. Neka je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_1, to znači da

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$\begin{aligned} |y| &= |f(x)| \\ &= |2\xi_1 - \xi_3 + 5\xi_5| \\ &\leq |2\xi_1| + |-\xi_3| + |5\xi_5| \\ &\leq 2|\xi_1| + |\xi_3| + 5|\xi_5| \\ &\leq 5(|\xi_1| + |\xi_3| + |\xi_5|) \\ &\leq 5\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pa je zaista $y \in \mathbb{R}$. Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= 2(\alpha\xi_1^{(1)} + \beta\xi_1^{(2)}) - (\alpha\xi_3^{(1)} + \beta\xi_3^{(2)}) + 5(\alpha\xi_5^{(1)} + \beta\xi_5^{(2)}) \\ &= \alpha(2\xi_1^{(1)} - \xi_3^{(1)} + 5\xi_5^{(1)}) + \beta(2\xi_1^{(2)} - \xi_3^{(2)} + 5\xi_5^{(2)}) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu već ustanovljene relacije

$$|f(x)| \leq 5\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| = 5\|x\|.$$

Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq 5.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in l_1 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_1$. Izaberimo x_0 na sljedeći način

$$x_0 = e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ..., 0, ...).$$

Kako vrijedi $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1 < \infty$, x_0 je zaista u l_1, i imamo

$$|f(x_0)| = |2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 1| = |5| = 5,$$

$$\|x_0\| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{5}{1} = 5.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 5 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 5,$$

pa je $\|f\| = 5$.

b. Neka je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_1, to znači da

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_{2i}| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha \xi_{2i}^{(1)} + \beta \xi_{2i}^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i}^{(1)} + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i}^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu sljedeće relacije

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_{2i}| \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_{2i}| \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od ranijih zadataka, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq 1.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x\in l_1\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_1$. Izaberemo li x_0 kao bilo koji element u l_1 čije su neparne koordinate nule dobiti ćemo da je $\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = 1$, naprimjer

$$x_0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{2^3}, 0, ...,).$$

Kako vrijedi $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\frac{1}{2^i}| = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < \infty$, x_0 je zaista u l_1, i imamo

$$|f(x_0)| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_{2i}^{(0)}| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i}| = 2,$$

$$\|x_0\| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\frac{1}{2^i}| = 2.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{2}{2} = 1.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 1,$$

pa je $\|f\| = 1$.

c. Neka je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_1, to znači da

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\xi}{i} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\frac{\xi}{i}| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha \frac{\xi_i^{(1)}}{i} + \beta \frac{\xi_i^{(2)}}{i}) \\ &= \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\xi_i^{(1)}}{i} + \beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\xi_i^{(2)}}{i} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu sljedeće relacije

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\xi_i}{i}| \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\frac{\xi_i}{i}| \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od ranijih zadataka, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq 1.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x\in l_1\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_1$. Izaberemo li $x_0 = (1, 0, 0, 0, ...)$, jasno je da je $x_0 \in l_1$ jer $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1 < \infty$. Dalje imamo

$$|f(x_0)| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\xi_i^{(0)}}{i}| = |\frac{1}{1} + 0 + 0 + ...| = 1,$$

$$\|x_0\| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 1,$$

pa je $\|f\| = 1$.

▲

ZADATAK 4.0.4 *Neka je $0 < \delta < 1$, i preslikavanje f definirano sa*

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty).$$

Dokazati da je f ograničen linearan funkcional na l_∞, i izračunati $\|f\|$.

Rješenje: Neka je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_∞, to znači da je niz x ograničen, tj. da vrijedi

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \xi_i \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i = \frac{1}{1-\delta} \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i (\alpha \xi_i^{(1)} + \beta \xi_i^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \xi_i^{(1)} + \beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \xi_i^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu sljedeće relacije

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \xi_i| \\ &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} |\delta^i \xi_i| \\ &\le \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \\ &= \|x\| \tfrac{1}{1-\delta}. \end{aligned}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i| \le \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od ranijih zadataka, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \le \frac{1}{1-\delta}.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x\in l_\infty\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_\infty$. Izaberemo li $x_0 = (1,1,1,1,...)$, jasno je da je $x_0 \in l_\infty$ jer $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1 < \infty$. Dalje imamo

$$|f(x_0)| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i \xi_i^{(0)}| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^i| = \frac{1}{1-\delta},$$

$$\|x_0\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\frac{1}{1-\delta}}{1} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \le \frac{1}{1-\delta} \quad \wedge \quad \|f\| \ge \frac{1}{1-\delta},$$

pa je $\|f\| = \frac{1}{1-\delta}$. ▲

ZADATAK 4.0.5 *Neka je* $X = \{x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} : \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty\}$, *i na njemu definirana norma* $\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|$. *Dokazati da je sa*

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X)$$

definiran lineran funkcional na X, *ali da* f *nije ograničen.*

Rješenje: Primjetimo prvobitno da je skup X ustvari definiran kao l_1. Medjutim, na X ne posmtramo uobičajenu normu za l_1, već supremum normu, pa stoga i posebno uvodjenje prostora X. Ako bismo posmatrali l_1, jednostavno se utvrdjuje da je navedeni funkcional ograničen, što nam potvrdjuje da zaista ima smisla na l_1 kao uobičajenu normu uzimati $\|\cdot\|_1$. Predjimo sada na dokazivanje dobre definiranosti funkcionala f. Neka je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora X, to znači da vrijedi

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in X$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha\xi_i^{(1)} + \beta\xi_i^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i^{(1)} + \beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Jasno je da f nije ograničen, jer nema razloga zašto bi uvijek vrijedilo

$$|f(x)| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|.$$

U to se uvjeravamo posmatrajući npr. niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X, pri čemu je opći član niza element u X koji na prvih n mjesta ima jedinice, a na svim ostalim nule, tj.

$$\begin{aligned}
&x_1 = (1, 0, 0, ..., 0, 0, 0, ...)\\
&x_2 = (1, 1, 0, ..., 0, 0, 0, ...)\\
&\vdots\\
&x_n = (1, 1, 1, ..., 1, 1, 0, ...)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Prvobitno je neophodno provjeriti da je navedeni niz zaista u X, tj. da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}} \in X$. To je zadovoljeno jer

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i^{(n)} = n < \infty.$$

Dalje imamo

$$|f(x_n)| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i^{(n)}| = |n| = n,$$

$$\|x_n\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i^{(n)}| = 1,$$

pa sigurno ne vrijedi

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X) : \quad |f(x)| \leq M\|x\|,$$

tj. f nije ograničen. ▲

ZADATAK 4.0.6 *Dokazati da je f, definiran sa*

$$f(x) = x_1 - x_2 \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2),$$

linearan neprekidan funkcional na $\mathbb{R}^2$. Odrediti normu funkcionala f ako je norma definirana na $\mathbb{R}^2$

a. $\|\cdot\|_1$

b. $\|\cdot\|_2$

c. $\|\cdot\|_\infty$

Rješenje: Jasno je da je f dobro definiran jer ustvari $f(x)$ predstavlja razliku dva realna broja, pa je i sam realan. Dokažimo da je f lineran funkcional (linearnost funkcionala zavisi od aglebarske strukture Banachovog prostora, a ne metričke, kao što je to već nekoliko puta naglašeno, pa linearnost ne zavisi od norme na prostoru). Posmatrajmo proizvoljne $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Dokažimo ograničenost, te izračunajmo normu funkcionala. Neka je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

a. Kako je $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, imamo

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| \\ &= \|x\|_1. \end{aligned}$$

Dakle, f je ograničen, odnosno neprekidan operator, a na osnovu definicije norme funkcionala možemo zaključiti i da

$$\|f\| \leq 1.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1}$$

za bilo koji $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Izaberemo li $x_0 = (1, 0)$, jasno je da je $x_0 \in \mathbb{R}^2$, te da

$$|f(x_0)| = |x_1^{(0)} - x_2^{(0)}| = |1 - 0| = 1,$$

$$\|x_0\|_1 = |x_1^{(0)}| + |x_2^{(0)}| = |1| + |0| = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 1,$$

pa je $\|f\| = 1$.

b. Kako je $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, te na osnovu nejednakosti izmedju aritmetičke i kvadratne brojne sredine, imamo

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| \\ &= 2\frac{|x_1|+|x_2|}{2} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \sqrt{2}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Dakle, f je ograničen, odnosno neprekidan operator, a na osnovu definicije norme funkcionala možemo zaključiti i da

$$\|f\| \leq \sqrt{2}.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_2}$$

za bilo koji $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Izaberemo li $x_0 = (1, -1)$, jasno je da je $x_0 \in \mathbb{R}^2$, te da

$$|f(x_0)| = |x_1^{(0)} - x_2^{(0)}| = |1 - (-1)| = 2,$$

$$\|x_0\|_2 = \sqrt{(x_1^{(0)})^2 + (x_2^{(0)})^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq \sqrt{2} \quad \wedge \quad \|f\| \geq \sqrt{2},$$

pa je $\|f\| = \sqrt{2}$.

c. Kako je $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, imamo

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| \\ &\leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|x_1|, |x_2|\} \\ &= 2\max\{|x_1|, |x_2|\} \\ &= 2\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Dakle, f je ograničen, odnosno neprekidan operator, a na osnovu definicije norme funkcionala možemo zaključiti i da

$$\|f\| \leq 2.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_\infty}$$

za bilo koji $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Izaberemo li $x_0 = (1, -1)$, jasno je da je $x_0 \in \mathbb{R}^2$, te da

$$|f(x_0)| = |x_1^{(0)} - x_2^{(0)}| = |1 - (-1)| = 2,$$

$$\|x_0\|_1 = \max\{|x_1^{(0)}|, |x_2^{(0)}|\} = \max\{|1|, |-1|\} = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 2 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 2,$$

pa je $\|f\| = 2$.

▲

4.1 Geometrijski smisao linearnih funkcionala

U ovoj sekciji skripte "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/09)", kao što joj i sam naziv kaže, kroz nekoliko rezultata data je geometrijska interpretacija linearnih funkcionala - postoji bijektivno preslikavanje izmedju svih funkcionala $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ i hiperpovrsši prostora X. Zbog ograničenosti kursa, zadatke iz ove sekcije ćemo takodjer izostaviti.

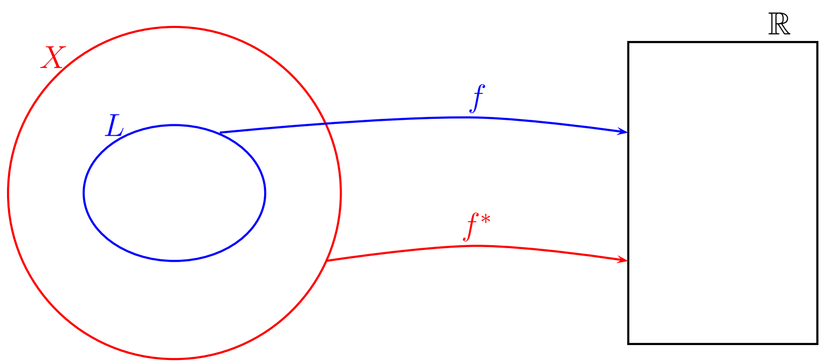
4.2 Hahn-Banachov teorem

Hahn-Banachov teorem zasigurno je jedan od važnijih teorema funkcionalne analize. Zbog razumljivosti i ljepote svog dokaza, i njegovih mnogobrojnih posljedica koje su same po sebi veliki rezultati, a takodjer imaju jednostavne dokaze, studentima se preporučuje da posebno obrate pažnju na ovu sekciju skripte "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/09)," koja je možda i jedna od najvažnijih i najljepših u kursu.

Teorem 4.2.1 (HAHN-BANACH) *Neka je X realan Banachov prostor, i L vektorski podprostor od X. Neka je na L definiran linearan ograničen funkcional $f : L \to \mathbb{R}$. Tada postoji linearan ograničen funkcional $f^* : X \to \mathbb{R}$ takav da*

a. $(\forall x \in L) : \quad f^*(x) = f(x)$,

b. $\|f^*\| = \|f\|$.



Dakle, na osnovu Hahn-Banachovog teorema imamo da svaki linearan ograničen funkcional f definiran na bilo kojem podprostoru $L \subseteq X$ ima svoju ekstenziju f^* definiranu na cijelom prostoru X, te da je pri tome očuvana norma. To je vrlo lijep rezultat, što nam takodjer potvrdjuju i mnogobrojne posljedice Hahn-Banachovog teorema, poput:

Teorem 4.2.2 *Neka je $0 \neq x_0 \in X$. Tada postoji ograničen linearan funkcional $f^* : X \to \mathbb{R}$ takav da*

a. $f^*(x_0) = \|x_0\|$

b. $\|f^*\| = 1$.

Teorem 4.2.3 *Neka je X Banachov prostor, $L \subset X$ njegov podprostor, i $x_0 \in X \backslash L$. Tada postoji ograničen linearan funkcional $f^* : X \to \mathbb{R}$ takav da*

a. $(\forall x \in L) : \quad f^*(x) = 0$

b. $f^*(x_0) = d(x_0, L)$

c. $\|f^*\| = 1$.

Što se tiče zadataka iz ove sekcije, oni mogu biti čak iskazani u obliku spomenutih posljedica Hahn-Banachovog teorema, jer su im dokazi sasvim jednostavni i razumljivi. Naravno, zbog široke primjene ovog teorema i njegovih posljedica, mnoštvo je i drugih tipova zadataka. Ovdje ćemo navesti samo nekoliko takvih.

ZADATAK 4.2.1 *Neka je X Banachov prostor, i $x, y \in X$. Ako za svaki lineran ograničen funkcional $f : X \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$f(x) = f(y),$$

onda je $x = y$. Dokazati!

Rješenje: Posmatrajmo element $x - y \in X$. Na osnovu prve navedene posljedice Hahn-Banachovog teorema, zaključujemo da postoji linearan ograničen $f^* : X \to \mathbb{R}$ takav da

$$f^*(x - y) = \|x - y\|,$$

što je, zbog linearnosti funkcionala f^*, ekvivalentno sa

$$f^*(x) - f^*(y) = \|x - y\|.$$

Kako $f(x) = f(y)$ vrijedi za sve linearne ograničene funkcionale $f : X \to \mathbb{R}$, onda vrijedi i $f^*(x) = f^*(y)$, pa imamo

$$0 = \|x - y\|,$$

odnosno, zbog osobine $(N2)$ norme,

$$x - y = 0,$$

tj. $x = y$, što je i trebalo dokazati. ▲

Ovaj vrlo lijep rezultat još jednom nam ukazuje na značaj fukcionala. Naime, sada nam je omogućeno da jednakost dva elementa u proizvoljnom prostoru X posmatramo preko jednakosti u nama bliskom skupu $\mathbb{R}$, jer je dokazano da je dovoljan uslov za jednakost dva elementa jednakost vrijednosti svih linearnih ograničenih funkcionala u tim tačkama.

ZADATAK 4.2.2 *Neka normiran linearan vektorski prostor X sadrži n linearno nezavisnih vektora. Dokazati da postoji n linearno nezavisnih linearnih ograničenih funkcionala $f : X \to \mathbb{R}$.*

Rješenje: Neka je $A = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ skup od n linearno nezavisnih vektora u X. Posmatrajmo skupove

$$L_i = \mathcal{L}(A_i), \text{ pri čemu je } A_i = A \backslash \{e_i\} \quad (i \in \overline{1,n}).$$

Neka je $i \in \overline{1,n}$ proizvoljan i fiksiran. Kako su po pretpostavci $e_1, e_2, ..., e_n$ linearno nezavisni vektori, onda skup A_i sigurno ne može generirati cijeli prostor X, tj. vrijedi

$$L_i \subset X,$$

a zbog iste činjenice zaključujemo i da

$$e_i \notin L_i.$$

Na osnovu druge navedene posljedice Hahn-Banachovog teorema, sada znamo da postoji ograničen linearan funkcional $f_i : X \to \mathbb{R}$ takav da

a. $(\forall x \in L_i): \quad f_i(x) = 0$

b. $f_i(e_i) = d(e_i, L_i)$

c. $\|f_i\| = 1.$

Želimo pokazati da $d(e_i, L_i) \neq 0$. To jednostavno slijedi iz činjenice da je L_i zatvoren kao konačnodimenzionalni vektorski prostor (generiran je sa $n-1$ linearno nezavisnih vektora, pa je dimenzije $n-1$). Naime, prisjetimo se da je

$$d(e_i, L_i) = \inf\{d(e_i, y) : \quad y \in L_i\},$$

a kako je $e_i \notin L_i$, i L_i zatvoren, sigurno se neće desiti da ovaj infimum bude nula. Konačno, pokažimo da su ovako dobijeni funkcionali $f_1, f_2, ..., f_n$ upravo traženih n linearno nezavisnih funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo njihovu linearnu kombinaciju, i neka

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0.$$

Navedena suma je jedan funkcional, pa posmatrajmo njegovo djelovanje u vektorima e_i :

$$0 = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j)(e_i) = \alpha_i f(e_i) = \alpha_i d(e_i, L_i).$$

Kako je $d(e_i, L_i) > 0$ mora vrijediti $\alpha_i = 0$, i to za proizvoljan $i \in \overline{1, n}$. Dakle, dobili smo da

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0 \quad \Rightarrow \quad (\forall i \in \overline{1,n}) : \ \alpha_i = 0,$$

pa su $f_1, f_2, ..., f_n$ linearno nezavisni. (Relacija c. iz posljedice nam je bila suvišna za ovaj zadatak, ali možemo primjetiti da smo čak pronašli n linearno nezavisnih normiranih, tj. "jediničnih" funkcionala.) ▲

4.3 Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala

Ova je sekcija svakako jedna od najznačajnih i "najopipljivijih" u kursu funkcionalne analize. Naime, postoji nekoliko "ogromnih" rezulata kada su u pitanju ograničeni linearni funkcionali na pojedinim poznatim Banachovim prostorima, poput $l_p, c_0, \mathcal{C}[a,b], L_p$. Pokazuje se tačno kakav oblik moraju imati svi funkcionali na odredjenom prostoru, te kolika je tačno njegova norma, što je iznenadjujuće lijep rezultat. Upravo zbog toga ćemo ovdje navesti neke od tih rezulata u obliku primjera, a dokazi istih nalaze se u "Uvod u realnu i funkcionalnu analizu", S. Aljančić.

ZADATAK 4.3.1 *Neka je $f : l_1 \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi*

$$(\exists ! y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty)(\forall x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1) : \quad f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.2 *Neka je $f : l_p \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional* $(1 < p < \infty)$. *Tada vrijedi*

$$(\exists ! y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)(\forall x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_p) : \quad f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.3 *Neka je $f : c_0 \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi*

$$(\exists! y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1)(\forall x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0): \quad f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.4 *Neka je $f : l_1 \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi*

$$(\exists! y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty)(\forall x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1): \quad f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.5 *Neka je $f : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi*

$$(\exists! y \in V[a,b], y(a) = 0)(\forall x \in \mathcal{C}[a,b]): \quad f(x) = \int_a^b x(t)dy(t),$$

i pri tome je $\|f\| = V_a^b y$.

ZADATAK 4.3.6 *Neka je $f : L_p(a,b) \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional $(1 < p < \infty)$. Tada vrijedi*

$$(\exists! y \in L_q(a,b), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)(\forall x \in L_p(a,b)): \quad f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.7 *Neka je $f : L_1(a,b) \to \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi*

$$(\exists! y \in L_\infty(a,b))(\forall x \in L_1(a,b)): \quad f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

4.4 Konjugovani prostori

Skup svih ograničenih linearnih funkcionala $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ označavati ćemo sa X^*, i nazivati ga dualni/adjungovani/konjugovani prostor prostora X. Dakle, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, a kako smo ranije pokazali da je za normiran vektorski prostor X i Banachov prostor Y i $\mathcal{L}(X,Y)$ Banachov, jasno je da je za normiran vektorski prostor X dualni prostor X^* Banachov.

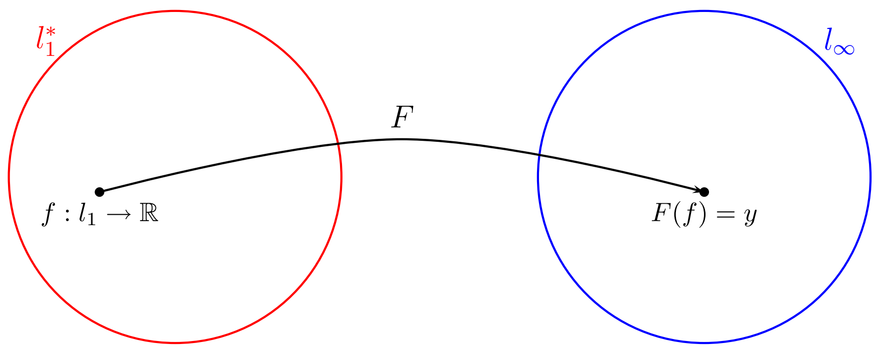
Ponovno ćemo imati iznimno lijepe rezultate o dualnim prostorima pojedinih Banachovih prostora - pokazati će se tačno kakvu strukturu ima prostor X^*. Te tvrdnje upravo su posljedica rezultata iz prethodne sekcije. Naime, iz ranijih zadataka zaključujemo da postoji dobro definirano preslikavanje F izmedju odgovarajućih prostora X^* i Y, a lako se pokazuje da je F izomorfizam i izometrija. Pokažimo to na prvom primjeru, a dokazi za ostale prostore su analogni.

ZADATAK 4.4.1 *Dokazati da vrijedi $l_1^* = l_\infty$.*

Rješenje: U prvom zadatku prethodne sekcije pokazano je da svaki linearan ograničen funkcional $f : l_1 \to \mathbb{R}$ ima oblik

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1),$$

pri čemu je $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, i $\|f\| = \|y\|$. Posmatrajmo preslikavanje $F : l_1^* \to l_\infty$ koje svakom ograničenom linearnom funkcionalu $f : l_1 \to \mathbb{R}$ pridružuje odgovarajući $y \in l_\infty$. Kako je dokazano da vrijedi $\|f\| = \|y\|$, odmah zaključujemo da je F izometrija.



Dokažimo da je F izomorfizam. Lako uočavamo da je F sirjekcija, jer za svaki $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ postoji linearan ograničen funkcional $f : X \to \mathbb{R}$, takav da je $F(f) = y$. Na osnovu definicije preslikavanja F jasno da je da će taj funkcional biti definiran sa

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1).$$

(U dokazu navedenog zadatka iz prethodne sekcije pokaže se da je ovako definirana funkcija f zaista linearan ograničen funkcional na l_1.) Neka su sada $f_1, f_2 \in l_1^*$ proizvoljni. Na osnovu dokazane tvrdnje, oni moraju biti sljedećeg oblika

$$f_1(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i^{(1)} \xi_i, f_2(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i^{(2)} \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1),$$

pri čemu su $y_1 = (\eta_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}, y_2 = (\eta_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ jedinstveno odredjeni. Na osnovu definicije preslikavanja F, vrijedi $y_1 = F(f_1), y_2 = F(f_2)$. Ako pretpostavimo da $y_1 \neq y_2$, jasno je da je tada $f_1 \neq f_2$. Naime, kako su po pretpostavci y_1 i y_2 različiti, oni se razlikuju u barem k-toj koordinati. Uzmemo li x kao vektor koji ima sve nule, te jedinicu samo kao k-tu koordinatu, jasno je da $x \in l_1$, i da

$$f_1(x) = \eta_k^{(1)} \neq \eta_k^{(2)} = f_2(x),$$

pa su i funkcionali f_1 i f_2 različiti, tj. F je injekcija. Dakle, F je bijekcija, pa je ostalo još da pokažemo da vrijedi

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F(f_1) + \beta F(f_2).$$

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i^{(1)} \xi_i + \beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i^{(2)} \xi_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha \eta_i^{(1)} + \beta \eta_i^{(2)}) \xi_i,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} F(\alpha f_1 + \beta f_2) &= y \\ &= (\alpha\eta_i^{(1)} + \beta\eta_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha(\eta_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}} + \beta(\eta_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ &= \alpha F(f_1) + \beta F(f_2). \end{aligned}$$

Dakle, F je izomorfizam i izometrija, pa je $l_1^* = l_\infty$. ▲

ZADATAK 4.4.2 *Dokazati da vrijedi* $l_p^* = l_q$, $(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

ZADATAK 4.4.3 *Dokazati da vrijedi* $c_0^* = l_1$.

ZADATAK 4.4.4 *Dokazati da vrijedi* $\mathcal{C}[a,b]^* = NV_0[a,b]$, *pri čemu je* $NV_0[a,b]$ *skup svih funkcija iz* $V[a,b]$ *koje su neprekidne s desne strane (tzv. normalizovane funkcije ograničene varijacije).*

ZADATAK 4.4.5 *Dokazati da vrijedi* $L_p(a,b)^* = L_q(a,b)$, $(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

ZADATAK 4.4.6 *Dokazati da vrijedi* $L_1(a,b)^* = L_\infty(a,b)$.

Naravno, jednakosti u prethodnim primjerima nisu jednakosti na kakve smo možda do sada navikli. Posmatramo li samo prvi primjer, primjećujemo da su elementi prostora l_1^* funkcionali, dok su elementi prostora l_∞ nizovi, pa navedena jednakost ne podrazumijeva jednaku prirodu elemenata. Ona ustvari podrazumijeva činjenicu da se radi o prostorima koji su algebarski izomorfni i izometrični, pa ih sa aspekta funkcionalne analize možemo identificirati.

Još jedan iznimno važan rezultat iskazan je u sljedećem teoremu:

Teorem 4.4.1 *Neka je X proizvoljan normiran linearni vektorski prostor, i X^{**} dualni prostor njegovog dualnog prostora X^*. Tada vrijedi*

$$X \subseteq X^{**}.$$

Jasno, i ovdje nas ne zanima priroda elemenata prostora X i X^* (koja je naravno različita), već samo njihova algebarska i metrička struktura. S obzirom na posljednji teorem, ima smisla sljedeća definicija:

Definicija 4.4.1 (REFLEKSIVAN PROSTOR) *Neka je X Banachov prostor. X je refleksivan prostor ako vrijedi $X = X^{**}$, a u suprotnom, ako vrijedi $X \subset X^{**}$, nazivamo ga irefleksivnim.*

Uzmemo li u obzir prethodne primjere, potpuno je jasno da su prostori l_p i $L_p(a,b)$, $(1 < p < \infty)$ refleksivni, a c_0 i $\mathcal{C}[a,b]$ irefleksivni. (Zašto?)

4.5 Slaba konvergencija

Još jedan zanimljiv pojam u ovom poglavlju svakako je i pojam slabe konvergencije. Konvergencija na kakvu smo do sada navikli, definiranu preko norme odgovarajućeg prostora, je ustvari jaka konvergencija. Medjutim, zanimljivo je posmatrati konvergenciju niza u X i na jedan drugi način, preko funkcionala $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Definicija 4.5.1 (SLABA KONVERGENCIJA) *Neka je X Banachov prostor. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ slabo konvergira ka $x_0 \in X$ ako vrijedi*

$$(\forall f \in X^*) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Pišemo $x_n \rightharpoonup x_0 \quad (n \to \infty)$.

Dakle, pojam slabe konvergencije omogućava nam posmatranje "konvergencije" nekog niza u X preko konvergencije nama bližih brojnih nizova, i to tako što posmatramo vrijednosti svih funkcionala f u tačkama početnog niza. To je još jedna u nizu potvrda moći i važnosti funkcionala za funkcionalnu analizu.

ZADATAK 4.5.1 *Jaka konvergencija povlači slabu konvergenciju, ali obrat ne vrijedi. Dokazati!*

Rješenje: Neka niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergira jako, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Neka je $f \in X^*$ proizvoljan. Kako je f linearan i ograničen, imamo

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| = \|f(x_n - x_0)\| \leq \|f\|\|x - x_0\|,$$

pa $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, odnosno

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad (n \to \infty).$$

Dakle, dobili smo da je svaki jako konvergentan niz slabo konvergentan, a sada pokažimo da obrat ne vrijedi. Posmatrajmo prostor $X = l_2$ i u njemu niz jediničnih vektora $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Jasno je da niz $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne konvergira jako u l_2, jer

$$\|x_m - x_n\| = \|e_m - e_n\| = \sqrt{2},$$

pa $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nije ni Cauchyev. S druge strane, posmatramo li proizvoljan $f \in l_2^*$, na osnovu prethodnih sekcija f ima oblik

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}),$$

pri čemu je $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$. Dakle, $f(e_i) = \eta_i$. Medjutim, kako je $y \in l_2$, vrijedi $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\eta_i|^2 < \infty$, pa $|eta_i|^2 \to 0 (n \to \infty)$, tj.

$$\eta_i \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Stoga za sve funkcionale $f : l_1 \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = \lim_{n\to\infty} \eta_n = 0,$$

pa je niz $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ slabo konvergentan. ▲

Primjedba 4.5.1 *Još iz Matematičke analize I poznato je da za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$ i neprekidnu funkciju f vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

tj. da limes i djelovanje funkcije f mogu mijenjati mjesta. Posmatrajmo sada niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ koji je slabo konvergentan, tj. niz za koji vrijedi

$$(\forall f \in X^*) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Kako je, po definiciji dualnog prostora X^*, f neprekidan funkcional, iskoristimo prethodnu osobinu:

$$(\forall f \in X^*): \quad f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0).$$

Prisjetimo se jednog od ranijih zadataka, gdje smo na osnovu posljedice Hahn-Banachovog teorema pokazali da

$$[(\forall f \in X^*): \quad f(x) = f(y)] \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Na osnovu toga, sada bismo dalje imali

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

odnosno da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jako konvergentan. Dakle, zaključili smo da je svaki slabo konvergentan niz i jako konvergenta, što sigurno nije tačno na osnovu prethodnog zadatka. Gdje je greška?
Navedeno mijenjanje mjesta limesa i djelovanja funkcije f moguće je, kao što je to uostalom i navedeno na početku primjedbe, samo ukoliko je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (jako) konvergentan, što ne mora biti slučaj.

Dalje se analogijom mogu uvoditi pojmovi slabo Cauchyevog niza, slabe kompaktnosti, itd.

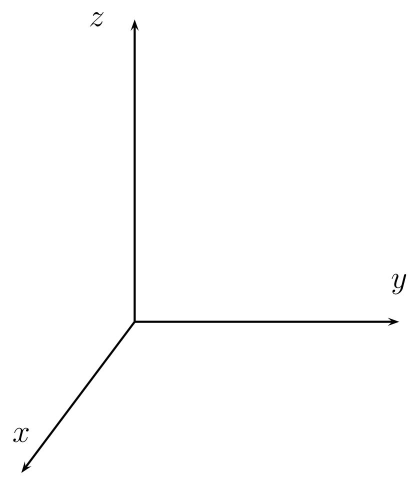
Poglavlje 5

Hilbertovi prostori

Konačno, posljednje poglavlje ove skripte trebalo bi omogućiti bolje shvatanje prirodnog generaliziranja skalarnog proizvoda kao još jedne u nizu lijepih osobina koje prenosimo sa Euklidskih na proizvoljne prostore. Ono nam dalje omogućava shvatanje ostalih ključnih pojmova ove sekcije, poput pojma Hilbertovog prostora, ili ortogonalnosti i ortnormiranosti.
Kroz rješavanje zadataka iz ovog poglavlja studenti bi trebali naučiti zašto odredjeni prostori jesu ili nisu Hilbertovi, te shvatiti vezu izmedju Hilbertovih prostora i onih uvedenih u ranijim sekcijama, prvenstveno svakako imajući u vidu Banachove prostore. Takodjer, kroz jednostavne primjere, moći će primjeniti neke važne osobine i bogatstvo skalarnog proizvoda u dokazivanju zanimljivih relacija u Hilbertovim prostorima. Neophodno je i kvalitetno razumijevanje od ranije nam bliskog pojma ortonormiranih sistema, koji će zaokružiti generalizaciju našeg trodimenzionalnog prostora.

5.1 Skalarni proizvod. Hilbertovi prostori.

Već dugo vremena matematičari definiraju različite generalizacije nama bliskih Euklidskih prostora, koje možemo pratiti i kroz cijeli kurs Realne analize. Prvobitno se, krajem 19. stoljeća uvodi pojam generaliziranog linearnog vektorskog prostora, koji nam omogućava da sabiramo vektore i množimo ih skalarima. Naime, "vektor" $x \in X$ ne mora više biti vektor u klasičnom smislu, tj. ne mora biti geometrijska veličina koja ima pravac, smjer i intenzitet, već je to jednostavno element bilo kojeg prostora koji zadovoljava odredjene osobine (kao i Euklidski prostori). Kasnije, uvodeći normu na takvom linearnom vektorskom prostoru, omogućeno nam je i mjeriti "intenzitet" vektora, te njihove medjusobne udaljenosti. Konačno, uvodeći skalarni proizvod i Hilbertove prostore, penjemo se na najvišu stepenicu, jer nam postaje moguće i mjeriti uglove izmedju vektora.



Na taj način, generalizirali smo metode vektorske algebre i računa sa trodimenzionalnog Euklidskog prostora na proizvoljne konačnodimenzionalne i beskonačnodimenzionalne prostore.

Definicija 5.1.1 (SKALARNI PROIZVOD) *Neka je X linearan vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Za funkciju $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ kažemo da je skalarni proizvod na X, ako zadovoljava sljedeća četiri uslova*

$(U1)$ $(\forall x \in X): \quad \langle x, x\rangle \geq 0$

$(U2)$ $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(U3)$ $(\forall x, y \in X): \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$(U4)$ $(\forall x, y, z \in X)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})): \quad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

Tada uredjeni par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazivamo unitaran linearan vektorski prostor.

Dakle, pojam skalarnog proizvoda uvodimo na realnim i kompleksnim linearnim vektorskim prostorima (tj. linearnim vektorskim prostorima nad poljem skalara $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Tako, ukoliko u zadatku nije drugačije naglašeno, podrazumijevamo opštiju verziju kompleksnog linearnog vektorskog prostora.

Neke od najvažnijih osobina skalarnih proizvoda navesti ćemo u sljedećem teoremu. Ti rezultati, kao i dokazi istih, svi su izloženi u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)". Zbog svoje jednostavnosti i značajnosti, oni mogu biti iskazani kao zadaci, pa se studenti još jednom upućuju na praćenje predavanja, možda i ponajviše u ovom poglavlju.

Teorem 5.1.1 (OSOBINE SKALARNOG PROIZVODA) *Neka je* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *unitaran prostor. Tada vrijedi*

(i) $(\forall x, y, z \in X)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})): \quad \langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$

(ii) $(\forall x \in X): \quad \langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$

(iii) $(\forall x, y \in X): \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ *(Cauchy-Bunakowski-Schwarz)*

(iv) *Skalarni proizvod je neprekidna funkcija svojih argumenata, tj. ako vrijedi* $x_n \to x_0, y_n \to y_0 \quad (n \to \infty)$, *onda i*

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle.$$

Kao što je to i mnogo ranije navedeno, ispostavlja se da je jako važno (a uzmemo li u obzir da želimo generalizirati trodimenzionalni Euklidski prostor i sasvim prirodno) raditi u kompletnim prostorima, pa je sasvim opravdana sljedeća definicija.

Definicija 5.1.2 (HILBERTOV PROSTOR) *Kompletan unitaran linearan vektorski prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Teorem 5.1.2 (VEZA UNITARNIH I NORMIRANIH PROSTORA)

a. *Neka je* X *unitaran prostor. Tada je sa*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

definirana norma na X, *koja zadovoljava relaciju paralelograma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

i vrijedi

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2).$$

Takvu normu nazivamo induciranom skalarnim proizvodom.

b. *Neka je* X *normiran prostor, i neka* $\|\cdot\|$ *zadovoljava relaciju paralelograma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Tada je sa

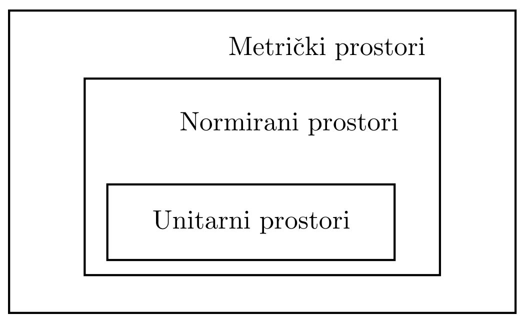
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

definiran skalarni proizvod koji preko

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

inducira zadanu normu.

Uzmemo li u obzir i kompletnost, jasno je da nam onda prethodni teorem daje informaciju o odnosu Hilbertovih i Banachovih prostora. Dakle, svaki unitaran prostor je normiran, ali obrat ne vrijedi. Ako se prisjetimo i na početku uvedenog pojma metrike, imamo sljedeću situaciju:



Sada se posebice opravdanom čini uvodna primjedba da se, uvodeći Hilbertove prostore, penjemo na najvišu stepenicu.
Medjutim, pored navedenog, možda još važnija informacija koju dobijamo iz posljednjeg teorema je njegova kontrapozicija (tj. kontrapozicija stava a.). Naime, ukoliko norma ne zadovoljava relaciju paralelegorama, X nije unitaran prostor, tj. ne možemo na X definirati skalarni proizvod koji inducira zadanu normu, što će nam biti od značaja želimo li pokazati da odredjeni normiran prostor nije unitaran.

Prvobitno se ipak prisjetimo skalarnog proizvoda studentima poznatog još iz srednje škole, skalarnog proizvoda u Euklidskom trodimenzionalnom prostoru. Ako su vektori $\overrightarrow{a} = \{2, -3, 5\}$ i $\overrightarrow{b} = \{-1, 4, 1\}$, onda je njihov skalarni proizvod

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 1 = -2 - 12 + 5 = -9.$$

Sada sasvim sigurno sljedeći zadatak djeluje prirodno.

ZADATAK 5.1.1 *Dokazati da je $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertov prostor, ako je*

a. $X = \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

b. $X = \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

c. $X = l_2, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i \overline{\eta_i}$

d. $X = L_2[a,b], \quad \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$

Rješenje:

a. Ranije smo utvrdili da je $\mathbb{R}^n$ linearan vektorski prostor. Funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je sigurno realna jer je definirana kao konačna suma realnih brojeva. Provjerimo osobine skalarnog proizvoda (U1)-(U4). Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

(U1) $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

(U2) Druga osobina je zadovoljena jer

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \quad (\forall i \in \overline{1,n})\\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

(U3) Kako se radi o realnom vektorskom prostoru, treba ustvari pokazati da je $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, što je jednostavno za zaključiti

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle$$

(U4) Konačno, vrijedi i četvrta osobina skalarnog proizvoda:

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle\end{aligned}$$

Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je zaista skalarni proizvod, pa je $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran linearan vektorski prostor. Norma inducirana ovim skalarnim proizvodom je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}},$$

a od ranije je poznato da je $\mathbb{R}^n$ sa ovakvom normom kompletan, pa je $(\mathbb{R}^n, \langle x, y\rangle)$ Hilbertov prostor.

b. Analogno bismo utvrdili da je $\mathbb{C}^n$ linearan vektorski prostor. Funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sigurno daje vrijednosti u polju skalara $\mathbb{C}$, jer je definirana kao konačna suma kompleksnih brojeva. Provjerimo osobine skalarnog proizvoda (U1)-(U4). Neka su $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni.

(U1) $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$

(U2) Druga osobina je zadovoljena jer

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad (\forall i \in \overline{1, n}) \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

(U3) Na osnovu činjenice da $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, i $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ (što se sve veoma jednostavno provjerava, uzimajući $x = a + bi, y =$

$c+di$), imamo

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{x_i}}\cdot\overline{y_i}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{x_i}y_i}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i\overline{x_i}}\\ &= \overline{(\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x_i})}\\ &= \overline{\langle y,x\rangle}\end{aligned}$$

(U4) Konačno, vrijedi i četvrta osobina skalarnog proizvoda:

$$\begin{aligned}\langle \alpha x+\beta y,z\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)\overline{z_i}\\ &= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z_i}+\beta\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{z_i}\\ &= \alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle\end{aligned}$$

Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je zaista skalarni proizvod, pa je $(\mathbb{C}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran linearan vektorski prostor. Norma inducirana ovim skalarnim proizvodom je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

a jednostavno se provjerava da je $\mathbb{C}^n$ sa ovakvom normom kompletan, pa je $(\mathbb{C}^n,\langle x,y\rangle)$ Hilbertov prostor.

c. Ranije je utvrdjeno da je l_2 linearan vektorski prostor. Pokažimo da funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle$ daje vrijednosti u polju skalara $\mathbb{C}$. Neka su $x,y\in l_2$ proizvoljni nizovi kompleksnih brojeva, $x=(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}, y=(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Na osnovu definicije prostora l_2 imamo $\sum_{i\in\mathbb{N}}|\xi_i|^2<\infty$, $\sum_{i\in\mathbb{N}}|\eta_i|^2<\infty$. Trebamo pokazati da je $\langle x,y\rangle=\sum_{i\in\mathbb{N}}\xi_i\overline{\eta_i}\in\mathbb{C}$, tj. da $|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}|<\infty$. Na osnovu Hölderove nejednakosti imamo

$$|\sum_{i\in\mathbb{N}}\xi_i\overline{\eta_i}| \le \sum_{i\in\mathbb{N}}|\xi_i\overline{\eta_i}| \le (\sum_{i\in\mathbb{N}}|\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i\in\mathbb{N}}|\eta_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od zadataka iz ranije sekcije, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Provjerimo sada osobine skalarnog proizvoda (U1)-(U4). Neka su $x, y, z \in l_2$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni.

(U1) $\langle x, x\rangle = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \xi_i\overline{\xi_i} = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|^2 \geq 0$

(U2) Druga osobina je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \langle x, x\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(U3) Na osnovu činjenice da $\overline{\overline{u}} = u$, $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$, i $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$ (što se sve veoma jednostavno provjerava, uzimajući $u = a + bi, v = c + di$), imamo

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i\overline{\eta_i} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\overline{\xi_i}} \cdot \overline{\eta_i} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\overline{\xi_i}\eta_i} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\eta_i\overline{\xi_i}} \\ &= \overline{(\sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i\overline{\xi_i})} \\ &= \overline{\langle y, x\rangle} \end{aligned}$$

(U4) Konačno, vrijedi i četvrta osobina skalarnog proizvoda:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z\rangle &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha\xi_i + \beta\eta_i)\overline{\mu_i} \\ &= \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i\overline{\mu_i} + \beta \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i\overline{\mu_i} \\ &= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \end{aligned}$$

Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je zaista skalarni proizvod, pa je $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran linearan vektorski prostor. Norma inducirana ovim skalarnim proizvodom je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

a poznato je da je l_2 sa ovakvom normom kompletan, pa je $(l_2, \langle x, y\rangle)$ Hilbertov prostor.

d. Ranije je utvrdjeno da je $L_2[a,b]$ linearan vektorski prostor. Pokažimo da funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle$ daje vrijednosti u polju skalara $\mathbb{C}$. Neka su $x, y \in L_2[a,b]$ proizvoljne funkcije. Na osnovu definicije prostora $L_2[a,b]$ imamo $\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$, $\int_a^b |y(t)|^2 dt < \infty$. Trebamo pokazati da je $\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)} \in \mathbb{C}$, tj. da $|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}| < \infty$. Na osnovu integralnog oblika Hölderove nejednakosti, te činjenice da je za $u = a + ib$, $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, imamo

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt| &\leq \textstyle\int_a^b |x(t)\overline{y(t)}|dt \\ &\leq (\textstyle\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |\overline{y(t)}|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\textstyle\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Provjerimo sada osobine skalarnog proizvoda (U1)-(U4). Neka su $x, y, z \in L_2[a,b]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni.

(U1) $\langle x,x\rangle = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{x(t)}dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt \geq 0$

(U2) Druga osobina je zadovoljena jer

$$\begin{aligned} \langle x,x\rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_a^b |x(t)|^2 dt = 0 \\ &\Leftrightarrow |x(t)| = 0 \quad (\forall t \in [a,b]) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(U3) Na osnovu činjenice da $\overline{\overline{u}} = u$, $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$, i $\overline{\int_a^b f(u)du} = \int_a^b \overline{f(u)}du$ (što se sve veoma jednostavno provjerava, uzimajući $u = a+bi$, $v = c + di$), imamo

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \\ &= \int_a^b \overline{\overline{x(t)}} \cdot \overline{y(t)}dt \\ &= \int_a^b \overline{\overline{x(t)}y(t)}dt \\ &= \int_a^b \overline{y(t)\overline{x(t)}}dt \\ &= \overline{(\int_a^b y(t)\overline{x(t)})dt} \\ &= \overline{\langle y,x\rangle} \end{aligned}$$

(U4) Konačno, vrijedi i četvrta osobina skalarnog proizvoda:

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z\rangle &= \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))\overline{z(t)}dt \\ &= \alpha \int_a^b x(t)\overline{z(t)} + \beta \int_a^b y(t)\overline{z(t)} \\ &= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle\end{aligned}$$

Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je zaista skalarni proizvod, pa je $(L_2[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran linearan vektorski prostor. Norma inducirana ovim skalarnim proizvodom je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (\int_a^b |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}},$$

a poznato je da je $L_2[a,b]$ sa ovakvom normom kompletan, pa je $(L_2[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertov prostor.

▲

Sada se još jednom možemo uvjeriti u već nekoliko navrata spomenuti "vrh stepenica", jer je navedeno jako malo Hilbertovih prostora, za razliku od broja Banachovih, normiranih, kompletnih, separabilnih, ili metričkih prostora u ranijim poglavljima.Čak se medju Hilbertovim prostorima nije našlo mjesta ni za prostor neprekidnih funkcija $\mathcal{C}[a,b]$, zbog razloga navedenih već u sljedećem zadatku.

ZADATAK 5.1.2 *Dokazati da $(X, \|\cdot\|)$ nije Hilbertov prostor (tj. ne postoji skalarni proizvod na X koji inducira zadanu normu, ili X nije kompletan), ako je*

a. $X = \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|$

b. $X = \mathcal{C}[a,b], \quad \|x\| = \sup_{t\in[a,b]} \|x(t)\|$

c. $X = \mathcal{C}[a,b], \quad \|x\| = \int_a^b (|x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$

d. $X = l_p, \quad \|x\|_p = (\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty, p \ne 2)$

e. $X = l_\infty, \quad \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|$

Rješenje:

a. Posmatrajmo vektore $x = (1, 0, 0, ..., 0), y = (0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4,$$

pa

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \neq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

odnosno ne vrijedi relacija paralelograma. Stoga, X nije Hilbertov prostor.

b. Posmatrajmo funkcije $f(t) = t, g(t) = 1 \in \mathcal{C}[0, 1]$. Tada vrijedi

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = (\sup_{t\in[0,1]} |t + 1|)^2 + (\sup_{t\in[0,1]} |t - 1|)^2 = 2^2 + 1^2 = 5,$$

$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2(\sup_{t\in[0,1]} |t|)^2 + 2(\sup_{t\in[0,1]} |1|)^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4,$$

pa

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 \neq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

odnosno ne vrijedi relacija paralelograma. Stoga, X nije Hilbertov prostor.

c. Ovaj put nećemo, kao do sada, moći pronaći vektore koji ne zadovoljavaju relaciju paralelograma, jer takvi ne postoje. Naime, iz prethodnog zadatka jasno je da je funkcija definirana sa

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

skalarni proizvod, koji dalje očito preko $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$inducira zadanu normu. Medjutim, od ranije je poznato da $\mathcal{C}[a, b]$ sa ovako definiranom normom nije kompletan, pa nije ni Hilbertov.

d. Posmatrajmo nizove $x = (1, 0, 0, ..., 0, ...), y = (0, 1, 0, ..., 0, ...)$ koji su očito u l_p. Tada vrijedi

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = [(1^p+1^p)^{\frac{1}{p}}]^2+[(1^p+1^p)^{\frac{1}{p}}]^2 = (2^{\frac{1}{p}})^2+(2^{\frac{1}{p}})^2 = 4^{\frac{1}{p}}+4^{\frac{1}{p}} = 2\cdot4^{\frac{1}{p}},$$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4,$$

pa

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \quad &\Leftrightarrow 2\cdot 4^{\frac{1}{p}}=4\\ &\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{p}}=2\\ &\Leftrightarrow p=2.\end{aligned}$$

Dakle, ako $p\neq 2$, relacija paralelograma neće biti zadovoljena, pa stoga tada l_p nije Hilbertov prostor.

e. Posmatrajmo nizove $x=(1,0,0,...,0,...), y=(0,1,0,...,0,...)$ koji su očito u l_∞. Tada vrijedi

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=1^2+1^2=2,$$

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2=2\cdot 1^2+2\cdot 1^2=4,$$

pa

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2\|x\|^2+2\|y\|^2,$$

odnosno ne vrijedi relacija paralelograma. Stoga, X nije Hilbertov prostor.

▲

Primjedba 5.1.1 *Funkcija je jedan od osnovnih pojmova u matematici, pa je jasno problematično što prostor $\mathcal{C}[a,b]$ nije Hilbertov. Kao što smo mogli vidjeti kroz prethodni zadatak, $\mathcal{C}[a,b]$ sa uobičajenom normom nije unitaran prostor, dok se s druge strane može definirati skalarni proizvod ($\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$, kao u $L_2[a,b]$) koji inducira integral normu, ali nam tada izostaje kompletnost. Medjutim, ranije smo utvrdili da nedostatak kompletnosti i nije neki veliki nedostatak, jer svaki prostor možemo kompletirati, na osnovu teorema o kompletiranju, i to prostorom koji je tek nešto širi od početnog (Takodjer, u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)" pokazano je da se jednostavno dodefinira skalarni proizvod na cijelom širem prostoru). No, prisjetimo li se dokaza upravo teorema o kompletiranju, možemo ustanoviti da prostor $\overline{X}\supseteq X$ koji kompletira X čine klase ekvivalencije, pri čemu je relacija ekvivalencije definirana na odgovarajući način. Ali, prisjetimo se takodjer da su elementi prostora $L_2[a,b]$ upravo klase ekvivalencije (u kojima se nalaze medjusobno skoro svuda jednake funkcije). Dakle, kompletiranjem unitarnog prostora $(\mathcal{C}[a,b],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ dobijamo Hilbertov prostor $L_2[a,b]$.*

ZADATAK 5.1.3 *Neka je X unitaran prostor, i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Ako vrijedi $\langle x_n, x\rangle \to \|x\|^2, \|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to \infty)$, tada vrijedi i $x_n \to x \quad (n \to \infty)$.*

Rješenje: U zadacima sa unitarnim prostorima, gotovo je uvijek neophodno u potpunosti iskoristiti njihovo bogatstvo - skalarni proizvod. Naime, relacije koje treba dokazati najčešće i ne vrijede u normiranim prostorima, pa je jasno da moramo u obzir uzeti upravo unitarnost prostora. To radimo koristeći činjenicu da je norma na tom prostoru inducirana sa $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Sada želimo dokazati da $x_n \to x \quad (n \to \infty)$.

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= \sqrt{\langle x_n - x, x_n - x\rangle} \\
&= \sqrt{\langle x_n, x_n - x\rangle - \langle x, x_n - x\rangle} \\
&= \sqrt{\langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle} \\
&= \sqrt{\|x_n\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \overline{\langle x_n, x\rangle} + \|x\|^2} \\
&\to \sqrt{\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2} \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

pa zaista $x_n \to x \quad (n \to \infty)$. Dakle, na osnovu konvergencije nama bliskih nizova realnih brojeva, možemo zaključiti i konvergenciju niza u proizvoljnom Hilbertovom prostoru. ▲

Analogno kao kod Banachovih prostora, imamo sljedeću definiciju.

Definicija 5.1.3 (HILBERTOV PODPROSTOR) *Neka je X Hilbertov prostor, i $Y \subseteq X$. Y je Hilbertov podprostor od X ako je sam za sebe Hilbertov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X.*

5.2 Ortogonalnost i ortogonalni komplement

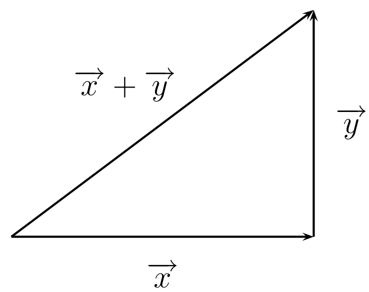
Još iz analitičke geometrije poznato je da su dva vektora u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru ortogonalni akko je njihov skalarni proizvod jednak nuli. Stoga ima smisla sljedeća generalizirana definicija ortogonalnosti u proizvoljnom Hilbertovom prostoru.

Definicija 5.2.1 (ORTOGONALNOST) *Neka je X Hilbertov prostor. Vektori $x, y \in X$ su ortogonalni ako je $\langle x, y\rangle = 0$. Pišemo $x \perp y$. Vektor $x \in X$ ortogonalan je na skup $S \subseteq X$ ako je $\langle x, y\rangle = 0$ za sve $y \in S$.*

Pišemo $x \perp S$.
Ortogonalni komplement skupa S *je skup svih vektora koji su ortogonalni na* S, *tj.* $S^{\perp} = \{x \in X : \quad (\forall y \in S) : x \perp y\}$.

Teorem 5.2.1 (PITAGORINA TEOREMA) *Neka je* X *Hilbertov prostor. Ako su* $x, y \in X$ *ortogonalni, tada vrijedi*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



Sada jedan rezultat poznat još iz osnovne škole imamo i u proizvoljnom Hilbertovom prostoru X. Upravo tu leži i ljepota ovog kursa, jer nam omogućava da matematička znanja iz osnovne i srednje škole, kao i prvih godina studija, sada dignemo na jednu višu razinu. Uvodimo analogne pojmove i dokazujemo analogne relacije, no koje sada vrijede u generaliziranim sredinama, jako opštim prostorima, gradeći tako krov na sva prethodno usvojena znanja. Tada postaje jako jednostavno, ukoliko je to potrebno, primjeniti sve dokazane relacije i teoreme u konkretnim, datim prostorima.

ZADATAK 5.2.1 *Neka je* X *Hilbertov prostor, i neka su* $a_1, a_2, ..., a_n \in X$ *ortogonalni vektori,* $a_i \neq 0$ $(i \in \overline{1, n})$. *Dokazati da su dati vektori* $a_1, a_2, ..., a_n$ *linearno nezavisni i da za njih vrijedi Pitagorina teorema*

$$\|a_1 + a_2 + ... + a_n\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + ... + \|a_n\|^2.$$

Rješenje: Da bi dokazali da su vektori $a_1, a_2, ..., a_n$ linearno nezavisni, posmatrajmo linearnu kombinaciju $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$. Pomnožimo tu kombinaciju sa vektorom a_j, gdje je $j \in \overline{1, n}$ proizvoljan. Na osnovu osobina skalarnog proizvoda, te ortogonalnosti vektora $a_1, a_2, ..., a_n$, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0 \quad &\Rightarrow \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, a_j \rangle = \langle 0, a_j \rangle \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle a_i, a_j \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_j \langle a_j, a_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

Kako po pretpostavci zadatka $a_j \neq 0$, na osnovu (U2) zaključujemo da je $\langle a_j, a_j \rangle \neq 0$, pa mora vrijediti $\alpha_i = 0$. Dakle, vektori $a_1, a_2, ..., a_n$ su zaista linearno nezavisni. Dokažimo drugi dio tvrdnje zadatka. Ponovno ćemo, naravno, iskoristiti bogatstvo Hilbertovih prostora - skalarni proizvod.

$$\begin{aligned} & \|a_1 + a_2 + ... + a_n\|^2 \\ = & \langle a_1 + a_2 + ... + a_n, a_1 + a_2 + ... + a_n \rangle \\ = & \langle a_1, a_1 + a_2 + ... + a_n \rangle + \langle a_2, a_1 + a_2 + ... + a_n \rangle \\ & + ... + \langle a_n, a_1 + a_2 + ... + a_n \rangle \\ = & \langle a_1, a_1 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle + ... + \langle a_1, a_n \rangle + \langle a_2, a_1 \rangle + \langle a_2, a_2 \rangle + ... + \langle a_2, a_n \rangle \\ & + ... + \langle a_n, a_1 \rangle + \langle a_n, a_2 \rangle + ... + \langle a_n, a_n \rangle \\ = & \|a_1\|^2 + 0 + ... + 0 + 0 + \|a_2\|^2 + ... + 0 + ... + 0 + 0 + ... + \|a_n\|^2 \\ = & \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + ... + \|a_n\|^2. \end{aligned}$$

▲

ZADATAK 5.2.2 *Neka je X Hilbertov prostor, i $Y \subseteq X$. Dokazati da je $Y^\perp$ Hilbertov podprostor prostora X.*

Rješenje: Da bi dokazali da je $Y^\perp$ Hilbertov podprostor od X, trebamo pokazati da je $Y^\perp$ Hilbertov prostor sam za sebe, tj. da je kompletan unitaran vektorski prostor. Pokažimo prvobitno da je $Y^\perp$ vektorski prostor, tj. da je $Y^\perp$ vektorski podprostor od X. Za to je dovoljno pokazati da

$$(\forall x, y \in Y^\perp)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}) : \quad \alpha x + \beta y \in Y^\perp.$$

U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x, y \in Y^\perp$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Na osnovu definicije ortogonalnog komplementa, imamo da je $x \perp Y, y \perp Y$, odnosno

$$\langle x, u \rangle = 0, \langle y, u \rangle = 0 \quad (\forall u \in Y).$$

Na osnovu osobine (U4) skalarnog proizvoda, za proizvoljan $u \in Y$ dalje imamo

$$\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

pa je zaista $\alpha x + \beta y \in Y^\perp$. Skalarni proizvod nasljedjen je iz X, pa je $Y^\perp$ unitaran linearan vektorski prostor. Dokažimo kompletnost. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyev niz u $Y^\perp$. Na osnovu definicije $Y^\perp$, imamo da je $x_n \perp Y$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno

$$\langle x_n, u\rangle = 0 \quad (\forall u \in Y) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je u $Y^\perp$, pa je i u X, a kako je X kompletan, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u X, tj. $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$. Trebamo pokazati da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $Y^\perp$, tj. da je $x_0 \in Y^\perp$. Kako je skalarni proizvod neprekidna funkcija, limes i djelovanje funkcije mogu mijenjati mjesta, pa imamo

$$\langle x_0, u\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

te je time dokaz završen. ▲

Teorem 5.2.2 *Neka je X Hilbertov prostor, i $Y \subseteq X$ njegov podprostor. Tada vrijedi $X = Y \oplus Y^\perp$.*

Posljednji teorem je važan rezultat, koji nam je nerijetko jako koristan i u zadacima. Naime, sada znamo da svaki $x \in X$ možemo na jedinstven način napisati kao $x = y + y'$, pri čemu je $y \in Y$, i $y' \in Y^\perp$.

5.3 Ortonormirani sistemi

Definicija 5.3.1 (ORTONORMIRAN SISTEM) *Neka je X unitaran linearan vektorski prostor. Skup vektora $E = \{e_i : \quad i \in I\} \subseteq X$ je ortonormiran ako vrijedi*

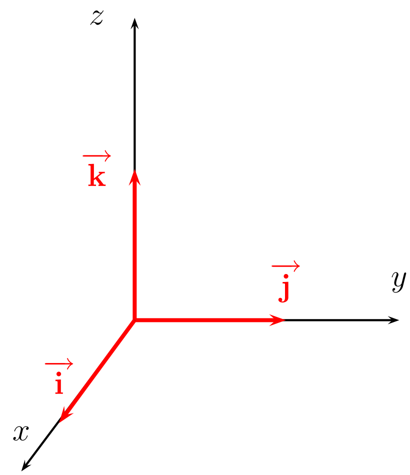
$$(\forall i, j \in I) : \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Ortonormiran sistem je maksimalan (potpun) ako nije sadržan niti u jednom širem ortonormiranom sistemu.

Primjedba 5.3.1 *Želimo li pokazati da je skup $E = \{e_i : \quad i \in I\} \subseteq X$ maksimalan ortonormiran sistem u X, najbolje je pretpostaviti suprotno, tj. pretpostaviti da postoji $f \in X$ takav da je $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = 1$, i da je f ortogonalan na sve vektore $e_i \in E$. Dobijemo li iz tih uslova da je $f = 0$, dobijamo kontradikciju jer tada, na osnovu (U2), ne vrijedi $\langle f, f\rangle = 1$.*

Još jednom ćemo se vratiti na analitičku geometriju u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru. Naime, prisjetimo se da, ako posmatramo vektor $\overrightarrow{a} =$

$\{2, -3, 5\}$, to ustvari znači da je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$, pri čemu vektori $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ čine potpun ortonormiran sistem.



Tako je sada sigurno jasna važnost potpunih ortnormiranih sistema u analizi, jer nam omogućava predstavljanje proizvoljnog vektora kao linearne kombinacije vektora iz tog sistema, što je, kao što ćemo se kasnije uvjeriti, moguće u svakom Hilbertovom prostoru.

ZADATAK 5.3.1 *Dokazati da je $E = \{e_i \;:\; i \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran sistem u X, ako je*

a. $e_i = (0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, ...), \quad X = l_2$

b. $e_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & i = 0, \\ \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, & i = 2k, \\ \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, & i = 2k-1. \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad X = L_2[-\pi, \pi]$

Rješenje:

a. Prvo primjetimo da su na ovaj način definirani vektori e_i očito u l_2, pa je zaista $E \subset l_2$. Sada predjimo da dokaz tvrdnje zadatka, tj. dokažimo da su vektori $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0, ...), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1, ...), ...$ svi normirani (jedinični) i medjusobno ortogonalni. Prisjetimo se da je skalarni proizvod u l_2 definiran sa

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i \overline{\eta_i} \quad (x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}, y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}).$$

Stoga za proizvoljne $i, j \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1,$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i \neq j),$$

odnosno E je zaista ortnormiran sistem u l_2.

b. Prvo primjetimo da su na ovaj način definirani vektori e_i očito u $L_2[-\pi, \pi]$, pa je zaista $E \subset L_2[-\pi, \pi]$. Sada predjimo na dokaz tvrdnje zadatka, tj. dokažimo prvobitno da su vektori $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_1 = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, e_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, e_3 = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, e_4 = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, ...$ svi normirani (jedinični) i medjusobno ortogonalni. Prisjetimo se da je skalarni proizvod u $L_2[-\pi, \pi]$ definiran sa

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}dt.$$

Stoga za proizvoljan $i \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$
\begin{aligned}
\|e_i\|^2 &= \langle e_i, e_i \rangle \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt, & i = 0, \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} dt, & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} dt, & i = 2k-1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dt, & i = 0, \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 kt}{\pi} dt, & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 kt}{\pi} dt, & i = 2k-1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt, & i = 0, \\ \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kt}{2} dt, & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2kt}{2} dt, & i = 2k-1. \end{cases} . \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}[\pi - (-\pi)], & i = 0, \\ \frac{1}{2\pi}[\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kt dt], & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{2\pi}[\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kt dt], & i = 2k-1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \frac{1}{2\pi}[\pi - (-\pi) + \frac{1}{2} \sin 2t|_{-\pi}^{\pi}], & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{2\pi}[\pi - (-\pi) - \frac{1}{2} \sin 2t|_{-\pi}^{\pi}], & i = 2k-1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \frac{1}{2\pi}[2\pi + \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin(-2\pi))], & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{2\pi}[2\pi - \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin(-2\pi)], & i = 2k-1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 1, & i = 2k, \qquad (k \in \mathbb{N}) \\ 1, & i = 2k-1. \end{cases} \\
&= 1 \quad (i \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}
$$

Jednostavno bismo utvrdili da je i

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i \neq j),$$

provjeravajući samo skalarne proizvode ukoliko su i i j iste ili različite parnosti, ili ukoliko je jedan od njih nula. Time dobijamo da je E ortnormiran sistem u $L_2[-\pi, \pi]$.

▲

Primjedba 5.3.2 *U prethodnom zadatku, mogli smo pokazati da su dati skupovi E čak i maksimalni ortonormirani sistemi. Naime, ako bismo u slučaju a. pretpostavili suprotno, tj. da postoji $f = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$ takav da je $\|f\| = 1$, i da je f ortonogonalan na sve vektore $e_i \quad (i \in \mathbb{N})$, imali bi*

$$\langle f, e_i\rangle = 0 \Leftrightarrow \mu_i = 0 \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Dakle, mora biti $f = 0$, što je kontradikcija sa $\|f\| = 1$, pa je E maksimalan ortonormiran sistem u l_2. S druge strane, da bi pokazali da je E maksimalan ortnormiran sistem i u slučaju b., potrebno bi bilo prisjetiti se elemenata Fourierove analize, pa je stoga taj dio zadatka izostavljen.

ZADATAK 5.3.2 *Neka je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirano sa*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(2x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1) \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2).$$

a. Dokazati da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni proizvod i odrediti normu koju on definira.

b. Dokazati da je $S = \{a, b\}$ potpun ortonormiran sistem u $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdje je $a = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), b = (1, -1)$.

Rješenje:

a. Već u pretpostavci zadatka je navedeno, a to je i sasvim jasno, da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ realna funkcija, pa odmah možemo prijeći na ispitivanje osobina (U1)-(U4). Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

(U1) $\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}(2x_1x_1 + 2x_2x_2 + x_1x_2 + x_2x_1) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$
Na više načina možemo utvrditi da je $x_1^2+x_2^2+x_1x_2 \geq 0$. Naprimjer, fiksiramo li $x_2 \in \mathbb{R}$, navedeni izraz posmatrali bismo kao kvadratnu funkciju od x_1, $f(x_1) = x_1^2+x_2x_1+x_2^2$. Tražeći rješenja odgovarajuće kvadratne jednačine

$$x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 = 0,$$

zaključujemo da je njena diskriminanta $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{x_2^2 - 4x_2^2} = \sqrt{-3x_2^2} \leq 0$, pa sigurno nijedan dio krive $f(x_1) = x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2$ neće biti ispod ose Ox_1, odnosno izraz $x_1^2 + 2x_1 + x_2^2$ neće biti negativan bez obzira na $x_1 \in \mathbb{R}$. Kako navedeno razmatranje može biti provedeno za proizvoljan $x_2 \in \mathbb{R}$, zaključujemo da za sve $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \geq 0.$$

(U2) Na osnovu prethodnih razmatranja zaključujemo da je zadovoljena i druga osobina skalarnog proizvoda. Naime, ako je u posmatranoj kvadratnoj jednačini $x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 = 0$ diskriminanta $D = \sqrt{-3x_2^2} < 0$, onda se cijeli grafik nalazi iznad ose $0x_1$, pa ta jednačina nema nula. Stoga, ako želimo imati rješenje $x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 = 0$, mora biti $D = \sqrt{-3x_2^2} = 0$, odnosno $x_2 = 0$. Medjutim, tada je $x_1 = \frac{-b \pm D}{2} = \frac{-x_2}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle = 0 \quad & \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 0 \\ & \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(U3) Kako se radi o realnom vektorskom prostoru, treba ustvari pokazati da je $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, što je jednostavno za zaključiti

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \quad & = \tfrac{1}{2}(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1) \\ & = \tfrac{1}{2}(2y_1x_1 + 2y_2x_2 + y_1x_2 + y_2x_1) \\ & = \langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

(U4) Konačno, vrijedi i četvrta osobina skalarnog proizvoda:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha x + \beta y, z \rangle \\ = \; & \tfrac{1}{2}[2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1] \\ = \; & \alpha\tfrac{1}{2}(2x_1z_1 + 2x_2z_2 + x_1z_2 + x_2z_1) + \beta\tfrac{1}{2}(2y_1z_1 + 2y_2z_2 + y_1z_2 + y_2z_1) \\ = \; & \alpha\langle x, z \rangle + \beta\langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Dakle, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je zaista skalarni proizvod. Norma inducirana ovim skalarnim proizvodom je

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}.$$

b. Dokažimo prvobitno da je $S = \{a, b\}$ ortonormiran sistem, tj. da su vektori a i b jedinični i medjusobno ortogonalni.

$$\|a\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9}} = 1,$$

$$\|b\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1\cdot(-1)} = \sqrt{1+1-1} = 1,$$

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle &= \tfrac{1}{2}[2\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1 + 2\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-1) + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-1) + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1]\\ &= \tfrac{1}{2}[2\tfrac{\sqrt{3}}{3} - 2\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}] = 0,\end{aligned}$$

pa je zaista S ortnormiran sistem. Dokažimo da je S i potpun ortonormiran sistem. Pretpostavimo suprotno, neka postoji $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ takav da je $\|c\| = 1$ i da je c ortogonalan i na vektor a i na vektor b.

$$\begin{aligned}\langle c, a\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}[2c_1\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{3} + 2c_2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{3} + c_1\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{3} + c_2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{3}]\\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}[\sqrt{3}c_1 + \sqrt{3}c_2] = 0\\ &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle c, b\rangle = 0 \;&\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}[2c_1\cdot 1 + 2c_2\cdot(-1) + c_1\cdot(-1) + c_2\cdot 1]\\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}[c_1 - c_2] = 0\\ &\Leftrightarrow c_1 - c_2 = 0,\end{aligned}$$

iz čega slijedi $c_1 = c_2 = 0$, pa je i $\|c\| = 0$, što je kontradikcija. Dakle, S je potpun ortonormiran sistem u $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

▲

Iako je postojanje maksimalnog ortnormiranog sistema zaista iznimna prednost, pokazuje se da su svi Hilbertovi prostori dovoljno "lijepi" da imamo sljedeći teorem.

Teorem 5.3.1 *Svaki Hilbertov prostor $X \neq \{0\}$ sadrži maksimalan ortonormiran skup.*

Štaviše, ukoliko se radi o separabilnim Hilbertovim prostorima, koji su zaista "najljepši" prostori i najuža klasa prostora koju ćemo u ovom kursu spominjati, imamo sljedeći rezultat.

Teorem 5.3.2 (GRAMM-SCHMIDTOV POSTUPAK ORTOGONALIZACIJE) *Svaki separabilan Hilbertov prostor sadrži najviše prebrojiv maksimalan ortnormiran sistem.*

Obavezno je proučiti dokaz posljednjeg teorema (nalazi se u skripti "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/2009)"), jer nam on ne omogućava samo egzistenciju prebrojivog maksimalnog ortonormiranog sistema, već takodjer daje i detaljan postupak kako do tog sistema doći.
Konačno, navesti ćemo još jedan od rezultata iz ovog poglavlja, koji je na neki način kruna kursa Realna analiza.

Teorem 5.3.3 *Neka je X Hilbertov prostor, i $E = \{e_i : \quad i \in I\} \subseteq X$ ortnormiran sistem. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a. $E = \{e_i : \quad i \in I\}$ *je maksimalan ortnormiran sistem*

b. $(\forall x \in X): \quad x = \sum_{i \in I} x_i e_i, \quad x_i = \langle x, e_i \rangle$

c. $(\forall x \in X): \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2$ *(Besselova jednakost)*

d. $(\forall x, y \in X): \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \overline{y_i}$ *(Parsevalova jednakost)*

Na osnovu ekvivalencije iskaza a. i b., maksimalni ortonormirani sistemi nazivaju se i ortnormirana baza prostora. Ovime opravdavamo ranije navedenu primjedbu kako je moguće proizvoljan vektor x iz Hilbertovog prostora predstaviti kao linearnu kombinaciju vektora iz maksimalnog ortnormiranog sistema, tj. ortonormirane baze. Medjutim, zanimljivo je primjetiti još jednu osobinu ovakvih baza. Naime, prisjetimo se da je skup A algebarska baza linearnog vektorskog prostora ako je $\mathcal{L}(A) = X$, odnosno ako proizvoljan $x \in X$ možemo napisati kao linearnu kombinaciju (ne uvijek iste) konačne kolekcije vektora iz te baze. S druge strane, uzmemo li obzir ortonormiranu bazu E, onda je proizvoljan vektor $x \in X$ moguće izraziti kao linearnu kombinaciju svih (dakle, u općem slučaju beskonačno mnogo) vektora te baze.

ZADATAK 5.3.3 *Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormiran niz u unitarnom prostoru X. Tada vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = 0.$$

Rješenje: Na osnovu činjenice $|\overline{z}| = |z|$, i Besselove nejednakosti, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, y \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty,$$

a kako je potreban uslov za konvergenciju reda da njegov opći član teži nuli, vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = 0.$$

▲

ZADATAK 5.3.4 *Neka je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertov prostor. Definirajmo preslikavanje*

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle, \text{ pri čemu je } x_0 \in X \text{ proizvoljan i fiksiran.}$$

Dokazati da je f ograničen linearan funkcional, i da vrijedi $\|f\| = \|x_0\|$.

Rješenje: Kako je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarani proizvod, f je realna funkcija, odnosno funkcional $f : X \to \mathbb{R}$ je dobro definiran. Ispitajmo linearnost. Neka su $x, y \in X$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Na osnovu osobine (U4) skalarnog proizvoda, imamo

$$f(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, x_0 \rangle = \alpha \langle x, x_0 \rangle + \beta \langle y, x_0 \rangle = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

pa je f linearan. Dokažimo ograničenost. Na osnovu Cauchy-Bunakowski-Schwarz nejednakosti, vrijedi

$$|f(x)| = |\langle x, x_0 \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle x_0, x_0 \rangle} = \|x\| \|x_0\|,$$

pa

$$(\exists M = \|x_0\|)(\forall x \in X) : \quad |f(x)| \leq M \|x\|.$$

Dakle, f je ograničen funkcional, i $\|f\| \leq \|x_0\|$. Ostalo je još pokazati da $\|f\| \geq \|x_0\|$. Na osnovu teorema o normi operatora, imamo (ako je $x_0 \neq 0$):

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\langle x_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\|,$$

što povlači da je $\|f\| = \|x_0\|$. (Ako je $x_0 = 0$, na osnovu osobina skalarnog proizvoda $f(x) = \langle x, 0 \rangle = 0$ uvijek, i tada $\|f\| = \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{0}{\|x\|} = 0$, pa i u ovom slučaju imamo $\|f\| = \|x_0\|$.) ▲

Na osnovu prethodnog zadatka, za svaki x_0 u Hilbertovom prostoru X, može se definirati jedan linearan funkcional sa $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$. Medjutim, postoji rezultat koji nam daje mnogo više informacija:

Teorem 5.3.4 *Neka je X Hilbertov prostor, i $f \in X^*$ proizvoljan. Tada vrijedi*

$$(\exists! y \in X)(\forall x \in X) : \quad f(x) = \langle x, y \rangle,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

Dakle, posmatramo li proizvoljan funkcional na Hilbertovom prostoru X, sada znamo da on mora biti ranije navedenog oblika, tj. mora postojati neki $x_0 \in X$, takav da dati funkcional uzima vrijednosti $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$. Prisjetimo li se kako su definirani skalarni proizvodi na pojedinim Hilbertovim prostorima, sada bi trebali biti potpuno jasni i opravdani neki rezultati u sekciji Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala.